Государственное бюджетное образовательное учреждение
дополнительного профессионального образования
«НИЖЕГОРОДСКИЙ ИНСТИТУТ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ»

Подготовка к ЕГЭ
ПО МАТЕМАТИКЕ

Избранные задания частей В и С

Нижний Новгород
Нижегородский институт развития образования
2012

УДК 372.016:51
ББК 74.262.21
П61

Авторы-составители:
М. А. Мичасова, доцент кафедры теории и методики
обучения математике ГБОУ ДПО НИРО, канд. пед. наук;
Б. Н. Иванов, заведующий кафедрой теории и методики обучения математике
ГБОУ ДПО НИРО, канд. физ.-мат. наук

Рецензенты:
М. И. Малкин, доцент механико-математического факультета
ННГУ им. Н. И. Лобачевского, канд. физ.-мат. наук;
Ю. Б. Великанов, учитель высшей категории
МОУ СОШ № 187 Н. Новгорода, канд. пед. наук

П61 **Подготовка** к ЕГЭ по математике. Избранные задания частей B и C / авт.-сост.: М. А. Мичасова, Б. Н. Иванов. — Н. Новгород : Нижегородский институт развития образования, 2012. — 218 с.
ISBN 978-5-7565-0527-6

Настоящее пособие содержит конспекты занятий и тематическую тетрадь для подготовки к выполнению заданий C1 и C2, примеры решения типовых и тренировочных задач B10, C5 и C6. Издание адресовано учителям и учащимся старших классов, а также преподавателям и учащимся образовательных учреждений начального и среднего профессионального образования.

УДК 372.016:51
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-7565-0527-6

Введение

Предлагаемое пособие предназначено для подготовки к решению заданий B10, C1, C2, C5 и C6 в формате ЕГЭ по математике 2013 года.

Практический материал по теме «Теория вероятностей» к заданию первой части B10 представлен в виде решения типовых задач открытого банка ЕГЭ, а также тренировочных задач диагностических работ и соответствующей рабочей тетради серии «ЕГЭ 2012».

Основной объем пособия составляют разделы, ориентированные на подготовку учащихся старшей школы к решению заданий C1 и C2. Они в первую очередь предназначены для учителей математики. Учебный материал по теме «Уравнения» не ограничен только непосредственной подготовкой к выполнению задания C1. Он представляет собой конспект семи занятий по решению тригонометрических уравнений с соответствующими методическими рекомендациями и набором вариантов самостоятельных работ с ответами. Материал для подготовки к заданию по стереометрии C2 оформлен в виде тематической рабочей тетради для учащихся. Она содержит более 200 задач, решение которых способствует выработке вычислительных навыков, развивает пространственные представления учащихся. Все задачи сопровождаются рисунками, ко всем задачам даны ответы.

Материал для подготовки к решению задач высокого уровня сложности C5 и C6 представлен в виде примеров решения задач вариантов ЕГЭ прошлых лет, а также различных тренировочных вариантов.

ТИПОВЫЕ И ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАЧИ B10

1. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 6 очков. Результат округлите до сотых.

Решение. В сумме 6 очков имеют следующие упорядоченные пары чисел: (1;5); (2;4); (3;3); (4;2); (5;1). Общее количество возможных исходов равно 36. Таким образом, $P(A) = \frac{5}{6 \cdot 6} = \frac{5}{36} = 0{,}14$.

2. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 16 очков. Результат округлите до сотых.

Решение. В сумме 16 очков имеют следующие шесть упорядоченных троек чисел: (4;6;6); (6;4;6); (6;6;4); (6;5;5); (5;6;5); (5;5;6). Общее количество возможных исходов равно 216. Таким образом, $P(A) = \frac{6}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{1}{36} = 0{,}03$.

3. В чемпионате по гимнастике участвуют 20 спортсменок: 8 из России, 7 из США, остальные — из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

Решение. Элементарное событие — спортсменка, выступающая первой. Всего 20 возможных исходов, 5 благоприятных. $P(A) = 0{,}25$.

4. В соревнованиях по толканию ядра участвуют 4 спортсмена из Финляндии, 7 спортсменов из Дании, 9 спортсменов из Швеции и 5 — из Норвегии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Швеции.

Решение. Всего 25 возможных исходов, из них 9 — благоприятных. $P(A) = \frac{9}{25} = 0{,}36$.

5. Конкурс исполнителей проводится в 5 дней. Всего заявлено 80 выступлений — по одному от каждой страны. В первый день 8 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

Решение. Всего 80 исходов, 18 благоприятных — число выступлений, запланированных на третий день. $P(A) = \frac{18}{80} = 0{,}225$.

6. В среднем из 1000 садовых насосов, поступивших в продажу, 5 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Решение. Не подтекают 995 насосов из 1000, следовательно, вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает, равна 0,995.

7. Фабрика выпускает сумки. В среднем на 100 качественных сумок приходится 8 сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

Решение. Из каждых 108 сумок 100 не имеют дефектов. $P(A) = \frac{100}{108} = 0{,}93$.

8. Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 10 участников из России, в том числе Руслан Орлов. Найдите вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России?

Решение. Всего 25 исходов, из них 9 — благоприятных. $P(A) = \frac{9}{25} = 0{,}36$.

9. В сборнике билетов по математике всего 25 билетов, в 10 из них встречается вопрос по неравенствам. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по неравенствам.

Решение. Всего 25 исходов, из них 15 — благоприятных. $P(A) = \frac{15}{25} = 0{,}6$.

10. Монету бросают три раза. Найдите вероятность элементарного исхода ОРО.

Первое решение. Всего возможно 8 элементарных исходов: ООО, РОО, ОРО, ООР, ОРР, РОР, РРО, РРР. Таким образом, вероятность элементарного исхода ОРО равна 0,125.

Второе решение. Произошли три независимых события: при первом бросании выпал орел, при втором — решка, при третьем — орел. Вероятность каждого из них равна 0,5.

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}125.$$

11. Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут жребий, чтобы определить, какая из команд начнет игру с мячом. Команда «Старт» играет по очереди с командами «Динамо», «Локомотив» и «Спартак». Найдите вероятность того, что «Старт» будет начинать только первую и третью игры.

Решение. Поскольку перед началом матча капитаны бросают монету, то условие задачи аналогично предыдущей. Так же требуется найти вероятность исхода ОРО. Ответ: 0,125.

12. Монету бросают четыре раза. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно два раза.

Решение. Применим формулу Бернулли. $P(A) = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16} = 0{,}375$.

13. В коробке лежат 7 красных карандашей, 8 синих и 3 зеленых. Какое наибольшее число желтых карандашей можно положить в эту коробку, чтобы после этого вероятность наугад достать из коробки красный карандаш была не меньше 0,3?

Решение. $P(A) = \frac{7}{18+n} \geq 0{,}3$; $n = 5$.

14. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера, которые тщательно перемешаны. Найдите вероятность того, что извлеченный наугад кубик будет иметь ровно две окрашенные грани.

Решение. Число ребер куба равно 12. Исключаем те кубики, которые располагаются в вершинах куба, и получаем $P(A) = \frac{12 \cdot 8}{1000} = 0{,}096$.

15. Иван Иванович регистрирует автомобиль в ГИБДД и получает новый трехзначный номер. Все три цифры нового номера случайны (номер 000 не разрешен). Найдите вероятность того, что при случайном выборе в новом номере все три цифры будут одинаковы.

Решение. Всего трехзначных чисел 999, из них 9 — с одинаковыми цифрами. $P(A) = \frac{9}{999} = \frac{1}{111}$.

16. В городе телефонные номера состоят из 7 цифр. Найдите вероятность того, что случайно выбранный телефонный номер является палиндромом, т. е. одинаково читается справа налево и слева направо.

Решение. Пусть число разрешенных первых цифр равно m, тогда общее число номеров равно $m \cdot 10^6$. Номер-палиндром однозначно определяется первыми четырьмя цифрами. Значит, семизначных палиндромов $m \cdot 10^3$. Вероятность того, что случайный номер является палиндромом, $P(A) = \frac{m \cdot 10^3}{m \cdot 10^6} = 0{,}001$.

17. Найдите вероятность того, что в семизначном телефонном номере пять последних цифр — две двойки и три тройки в любом порядке.

Решение. Общее количество комбинаций из пяти цифр равно 10^5. Из них число благоприятствующих данному событию равно количеству способов выбрать два места из пяти для цифры два. $C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$.

$P(A) = \frac{10}{10^5} = 0{,}0001$.

18. Найдите вероятность, что в случайном семизначном номере последняя цифра не больше 3, а две цифры перед ней не больше 2.

Решение. $P(A) = \frac{9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4}{9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = 0{,}036$.

19. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишень, а последние два раза промахнулся. Результат округлите до сотых.

Решение. $P(A) = 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}512 \cdot 0{,}04 = 0{,}02048 \approx 0{,}02$.

20. В классе 21 человек, среди них близнецы – Даша и Маша. Класс случайным образом делят на три группы по 7 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Даша и Маша окажутся в разных группах.

Решение. Противоположное событие — Даша и Маша окажутся в одной группе (в первой, во второй или в третьей). Таким образом, $P(\overline{A}) = 3 \cdot \frac{7}{21} \cdot \frac{6}{20} = 0{,}3$; $P(A) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

21. На фестивале органной музыки выступают 15 исполнителей, по одному от одной европейской страны. Порядок, в котором они выступают, определяется жребием. Какова вероятность того, что представитель Венгрии будет выступать после представителя Сербии, но перед музыкантом из Австрии?

Решение. Рассмотрим самое простое и короткое решение этой задачи. Исполнители из трех указанных стран могут расположиться (необязательно, подряд) шестью различными способами (число перестановок из трех). Благоприятствует данному условию только один из них. Ответ: $P(A) = \frac{1}{6}$.

З а м е ч а н и е: Ответ не зависит от общего числа исполнителей. Он определяется только числом участников, которых требуется расположить в заданном порядке.

22. В кармане у Пети 4 монеты по 1 рублю и 2 монеты по 2 рубля. Петя, не глядя, переложил какие-то три монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что обе двухрублевые монеты лежат в одном кармане.

Решение. Задача на нахождение вероятности сложного события. Двухрублевые монеты или были переложены в другой карман, или остались лежать на месте. Таким образом, $P(A) = \frac{C_2^2 \cdot C_4^1 + C_4^3}{C_6^3} = \frac{4+4}{20} = 0{,}4$.

23. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение. Определим события: А — кофе закончится в первом автомате; В — кофе закончится во втором автомате. По условию задачи, $P(A) = P(B) = 0{,}3$ и $P(AB) = 0{,}12$ (отметим, что эти события не являются независимыми, в противном случае $P(AB) = 0{,}09$). По формуле вероятности суммы, $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}3 + 0{,}3 - 0{,}12 = 0{,}48$. Следовательно, вероятность противоположного события «кофе останется в обоих автоматах» $P\left(\overline{A+B}\right) = 1 - 0{,}48 = 0{,}52$.

24. В банке три окна работы с клиентами. Вероятность того, что в случайный момент окно свободно, равна 0,3. Окна работают независимо друг от друга. В банк заходит клиент. Найдите вероятность того, что в этот момент свободно хотя бы одно окно.

Решение. $P(A) = 1 - 0{,}7^3 = 1 - 0{,}343 = 0{,}657$.

25. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в пятницу в автобусе окажется меньше 30 пассажиров, равна 0,72. Вероятность того, что пассажиров окажется меньше 20, равна 0,35. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 20 до 29.

Решение. Определим события: А — пассажиров будет меньше 20; В — пассажиров будет от 20 до 29; С — пассажиров будет меньше 30. Очевидно, что события А и В несовместимы и $C = A + B$. Тогда $P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B)$. $P(B) = P(A+B) - P(A) = 0{,}72 - 0{,}35 = 0{,}37$.

Задачи для самостоятельной работы

Вариант 1	Вариант 2
1. В группе 8 человек, говорящих только на немецком языке, и 6 человек, говорящих только на финском языке. Какова вероятность того, что из двух наудачу выбранных людей оба говорят а) на одном языке?	1. В урне 5 белых и 7 черных шаров. Из нее вынимают наудачу 2 шара. Какова вероятность того, что они окажутся а) одного цвета? б) разных цветов?

б) на разных языках? 2. ПИН-код для сим-карты — случайная комбинация четырех цифр. Будем называть ПИН-код удачным, если в нем встречаются только цифры 0 и 1 (обе цифры присутствуют). Найдите вероятность того, что покупателю сим-карты достанется удачный ПИН-код. 3. В избирательный список внесены фамилии четырех кандидатов: А, Б, К и М. Порядок фамилий в списке определяется случайно. Какова вероятность того, что фамилии будут расположены в алфавитном порядке? 4. Издание из двенадцати томов расположено на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что третий том окажется на седьмом месте, а седьмой том — на третьем месте? 5. На уроке физкультуры группа из 12 мальчиков случайным образом была разбита на две равные команды. Какова вероятность того, что два друга Петя и Вася оказались в разных командах?	2. ПИН-код для сим-карты — случайная комбинация четырех цифр. Будем называть ПИН-код простым, если в нем встречаются только одна или две цифры. Найдите вероятность того, что покупателю сим-карты достанется простой ПИН-код. 3. На рок-фестивале выступают группы, названия которых начинаются с букв латинского алфавита A, B, C, D. Последовательность их выступлений определяется жребием. Какова вероятность того, что группы будут выступать в следующем порядке: B, A, C, D? 4. Цифры 1, 2, 3, 4, 5 располагаются в ряд в случайном порядке. Какова вероятность того, что первой окажется четная, а последней — нечетная цифра? 5. На уроке физкультуры группа из 22 учащихся случайным образом была разбита на две равные команды. Какова вероятность того, что два друга Андрей и Сергей оказались в одной команде?

Ответы:

Вариант 1.

1. а) $\frac{43}{91}$, б) $\frac{48}{91}$;

2. 0,0014;

3. $\frac{1}{24}$;

4. $\frac{1}{132}$;

5. $\frac{6}{11}$.

Вариант 2.

1. а) $\frac{31}{66}$, б) $\frac{35}{66}$;

2. 0,064;

3. $\frac{1}{24}$;

4. 0,3;

5. $\frac{10}{21}$.

МЕТОДИКА ПОДГОТОВКИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАНИЯ С1

Ключевым признаком задания С1 является необходимость отбора полученных в результате решения того или иного уравнения корней в соответствии с вытекающими из условия задачи ограничениями. При этом для выполнения задания С1 необходимо уверенное владение навыками решения всех типов уравнений, изучаемых в основной и старшей школе: рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных, логарифмических.

Для того чтобы подготовку к ЕГЭ сделать максимально эффективной, материал пособия разбит на занятия, каждое из которых содержит устные упражнения, самостоятельные работы на 10 вариантов с ответами, подобранные упражнения для домашней самостоятельной работы, необходимые методические рекомендации по решению уравнений, проиллюстрированные большим числом примеров.

Подчеркнем, что в пособии использованы задания, отвечающие по уровню сложности заданию С1 ЕГЭ по математике. Много учебного времени отводится для оценивания уже готовых решений уравнений. Мы считаем, что данная работа очень полезна выпускникам и учит их тому, чтобы приводимое решение содержало все необходимые пояснения и обоснования и было понятным не только его автору, но и любому компетентному человеку, в частности проверяющему.

Данная схема проведения занятий, с нашей точки зрения, позволит выявить существующие пробелы и проблемные зоны в подготовке выпускников с целью устранения имеющихся проблем и выработки устойчивых навыков решения уравнений.

Данный учебный материал можно использовать на различных этапах обучения: для обеспечения уровневого подхода при решении тригонометрических уравнений в 10 классе, организации повторения и обобщения в 10 и 11 классе, осуществления контроля и самоконтроля знаний по теме «Уравнения» в 11 классе.

Занятие 1. Задания повышенного уровня сложности с развернутым ответом С1

Общая характеристика. Критерии проверки и оценки решений.

С1 2011 г.

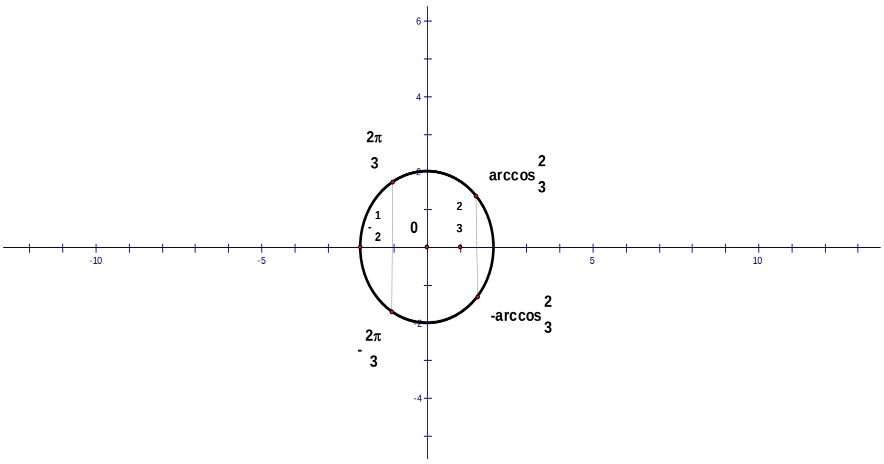
1. Решите уравнение $\dfrac{6\cos^2 x - \cos x - 2}{\sqrt{-\sin x}} = 0$

Решение.

$$\begin{cases} 6\cos^2 x - \cos x - 2 = 0, \\ -\sin x > 0. \end{cases}$$

Пусть $\cos x = t$, тогда $6t^2 - t - 2 = 0$. $t = -\dfrac{1}{2}$ или $t = \dfrac{2}{3}$.

Равенствам $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ и $\cos x = \dfrac{2}{3}$ на тригонометрической окружности соответствуют четыре точки. Две из них, находящиеся в верхней полуплоскости, не удовлетворяют условию $\sin x < 0$.



Получаем решения: $-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$ и $-\arccos\dfrac{2}{3} + 2\pi k; n, k \in Z$.

Ответ: $-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $-\arccos\dfrac{2}{3} + 2\pi k; n, k \in Z$.

Баллы	**Критерии оценки выполнения задания С1**
2	Обоснованно получен правильный ответ
1	Верно найдены нули числителя, но не произведен отбор найденных решений или допущены ошибки в отборе
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

2. Решите уравнение $\left(2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\right)\cdot\log_7(tgx)=0$

Решение.

1. $tgx>0$

2. $2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x=0$; $\sin x=0$ или $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Учитывая, что $tgx>0$, решения уравнения $\sin x=0$ не являются корнями исходного уравнения.

Решая систему $\begin{cases} tgx>0, \\ \sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$, получаем $x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z.$

3. Если $\log_7(tgx)=0$, то $tgx=1$, откуда $x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z.$

Ответ: $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z,\ \frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z.$

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получен правильный ответ
1	Верно найдены все значения переменной x, при которых равен нулю один из сомножителей левой части исходного уравнения. Возможно, отбор найденных значений или не произведен, или произведен неверно
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

3. Решите уравнение $\left(2\sin^2 x+11\sin x+5\right)\cdot\log_{15}(-\cos x)=0$

Решение.

1. $\cos x<0$

2. $2\sin^2 x+11\sin x+5=0$, откуда $\sin x=-5$ или $\sin x=-\frac{1}{2}$.

Уравнение $\sin x=-5$ не имеет решений.

Учитывая, что $\cos x<0$, из уравнения $\sin x=-\frac{1}{2}$ получаем: $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$.

3. $\log_{15}(-\cos x)=0$

$\cos x = -1$

$x = \pi + 2\pi k, k \in Z$.

Ответ: $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$; $\pi + 2\pi k, k \in Z$.

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получен правильный ответ
1	Верно найдены все значения переменной x, при которых равен нулю первый сомножитель левой части исходного уравнения. Возможно, отбор найденных значений или не произведен, или произведен неверно
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

Результаты решения задания повышенного уровня сложности С1 в Нижегородской области

год	**2010**	**2011**	**2012**
2 б	13 %	17 %	17,5 %
1 б	12 %	17 %	13,5 %

С1 2012 г.

а) Решите уравнение $\cos 2x + 0{,}75 = \cos^2 x$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$

Решение.

а) $\cos^2 x - \sin^2 x + 0{,}75 = \cos^2 x$; $\sin^2 x = \frac{3}{4}$; $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$; $x = \frac{2\pi}{3} + \pi k, k \in Z$

б) отберем корни: $-4\pi \le \frac{\pi}{3} + \pi k \le -\frac{5\pi}{2}$ $\qquad$ $-4\pi \le \frac{2\pi}{3} + \pi k \le -\frac{5\pi}{2}$

$-24 \le 2 + 6k \le -15$ $\qquad$ $-24 \le 4 + 6k \le -15$

$-\frac{26}{6} \le k \le -\frac{17}{6}$ $\qquad$ $-\frac{28}{6} \le k \le -\frac{19}{6}$

$k = -4; -3$ $\qquad$ $k = -4$

$x=-\frac{11\pi}{3}; x=-\frac{8\pi}{3}$ $\qquad\qquad$ $x=-\frac{10\pi}{3}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{3}+\pi k,\ \frac{2\pi}{3}+\pi k, k\in Z$; б) $-\frac{11\pi}{3};-\frac{10\pi}{3};-\frac{8\pi}{3}$.

Критерии оценивания

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах
1	Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

Устные упражнения (фронтальная работа с группой)

Одновременно работают на доске по карточкам трое учащихся.

Оцените решение задания С1 одним из учеников. Что бы вы поставили за это решение?

1. $(2\sin x-1)(\sqrt{-\cos x}+1)=0$

Решение.

Произведение равно нулю, если один множитель равен нулю, а второй существует.

1) $2\sin x-1=0$ $\qquad$ 2) $\sqrt{-\cos x}+1=0$

$2\sin x=1$ $\qquad$ $\sqrt{-\cos x}=-1$

$\sin x=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos x=-1$

$x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$ $\qquad$ $x=\pi+2\pi m$

$x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$

Ответ: $\frac{\pi}{6}+2\pi n$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$; $\pi+2\pi m$; $n\in Z, k\in Z, m\in Z$.

Оценка эксперта: 0 баллов

К о м м е н т а р и й: Нет отбора корней, допущена грубая ошибка при попытке решения уравнения $\sqrt{-\cos x}+1=0$.

2. $(2\sin x-1)(\sqrt{-\cos x}+1)=0$

Решение.

1) $2\sin x - 1 = 0$; $\sin x = \frac{1}{2}$; $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n, n \in Z$

2) $\sqrt{-\cos x} + 1 = 0$

Выражение $\sqrt{-\cos x} + 1$ всегда положительно, а значит, уравнение решений не имеет.

Ответ: $(-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n, n \in Z$.

Оценка эксперта: 1 балл

К о м м е н т а р и й: Пограничное решение, отбора корней нет, формально уравнение $2\sin x - 1 = 0$ решено верно, но нет равенства $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Разумеется, в классе многие учителя снизили бы оценку и поставили бы 0 баллов. При чисто «юридическом» чтении критериев нужно ставить 1 балл.

3. Дано уравнение $\sin 2x = 2\sin x - \cos x + 1$

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

$\sin 2x = 2\sin x - \cos x + 1$; $2\sin x\cos x = 2\sin x - \cos x + 1$; $2\sin x(\cos x - 1) = -(\cos x - 1)$

$2\sin x = -1$, $x \neq 0$

$\sin x = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

$-2\pi \le \frac{7\pi}{6} + 2\pi n \le -\frac{\pi}{2}$

$-3\frac{1}{6}\pi \le 2\pi n \le -\frac{10\pi}{6}$

$-\frac{19}{12} \le n \le -\frac{10}{12}$, $-1\frac{7}{12} \le n \le -\frac{10}{12}$

$n = -1$

$-2\pi \le -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \le -\frac{\pi}{2}$

$-2\frac{5}{6}\pi \le 2\pi n \le -\frac{2}{6}\pi$

$-\frac{17}{12} \le n \le -\frac{2}{12}$

$n = -1$

$x_1 = 1\frac{1}{6}\pi - 2\pi = -\frac{5}{6}\pi$ $\qquad$ $x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n = -\frac{\pi}{6} - 2\pi = -2\frac{1}{6}\pi$

Ответ: а) $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

б) $-\frac{5\pi}{6}; -2\frac{1}{6}\pi$.

Оценка эксперта: 0 баллов

К о м м е н т а р и й: Работа не пустая, уравнение $\sin x = -0{,}5$ решено верно и в итоге «почти» верно произведен отбор. Но есть бездумное сокращение на $\cos x - 1$ и один из отобранных корней явно находится вне нужного отрезка. Ни пункт *а*, ни пункт *б* не выполнены.

Карточки

1. Укажите наименьший отрицательный корень уравнения $\sin^2 x - 5\sin x + 4 = 0$.

2. Найдите все решения уравнения $1 + tg^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} = \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. Решите уравнение $\sin(\pi + x) = \cos\frac{\pi}{3}$

Самостоятельная работа у доски проверяется сразу же, акцентируется внимание на формулах приведения, табличных значениях синусов и косинусов и формуле $1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, при этом $\cos x \neq 0$.

Работа с классом

1. Найти все корни уравнения $(1 + tg^2 x)\sin x - tg^2 x + 1 = 0$, удовлетворяющие неравенству $tgx < 0$.

Решение.

$\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$; $\cos x \neq 0$

$\sin x - \sin^2 x + 1 - \sin^2 x = 0$; $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$\sin x = 1$ $\begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2}, \\ tgx < 0 \end{cases}$ $\qquad$ $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

удовлетворяет условию

$\cos x \neq 0$

Ответ: $-\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$.

2. Решите уравнение $\frac{\sin^2 2x-0{,}75}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\left(0{,}75-\cos^2 x\right)}=0$

Решение.

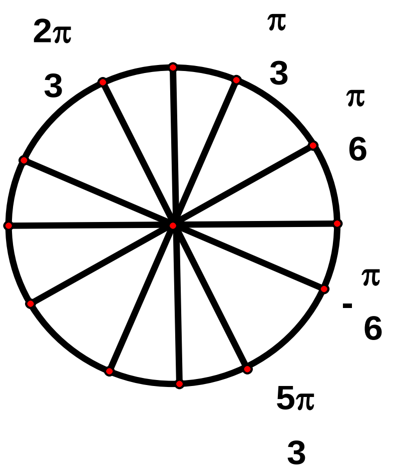
$$\begin{cases} \sin^2 2x=\frac{3}{4}, \\ \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\neq 0, \\ \cos^2 x\neq\frac{3}{4} \end{cases}$$

1. $\sin^2 2x=\frac{3}{4}$; $\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{3}{4}$, откуда $\cos 4x=-\frac{1}{2}$ и $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n, n\in Z$.

2. $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$, тогда $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$ и $x=\frac{\pi}{3}+\pi k$

3. $\cos^2 x=\frac{3}{4}$; $\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{3}{4}$; $\cos 2x=\frac{1}{2}$; $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi m, m\in Z$

4. $\begin{cases} x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n, \\ x\neq\frac{\pi}{3}+\pi k, \\ x\neq\pm\frac{\pi}{6}+\pi m, n\in Z, k\in Z, m\in Z \end{cases}$ $\qquad x=\frac{2\pi}{3}+\pi n, n\in Z$



Ответ: $\frac{2\pi}{3}+\pi n, n\in Z$.

Самостоятельная работа № 1

Вариант 1 1. Решите уравнение $\sin\frac{x}{2}=1$ 2. Найдите все корни уравнения $\left(tgx+\sqrt{3}\right)\left(2\cos x-1\right)=0$, удовлетворяющие неравенству $\sin x>0$	Вариант 2 1. Решите уравнение $\sin 3x=-\frac{1}{2}$ 2. Найдите все корни уравнения $\left(tgx-1\right)\left(\sqrt{2}\sin x+1\right)=0$, удовлетворяющие неравенству $\cos x<0$
Вариант 3 1. Решите уравнение $2\sin^2\frac{x}{2}+19\sin\frac{x}{2}-10=0$ 2. Найдите все корни уравнения $2\cos^2 x+\sqrt{3}\cos x=0$, удовлетворяющие неравенству $\sin x<0$	Вариант 4 1. Решите уравнение $2\cos^2 x+5\sin x+1=0$ 2. Найдите все корни уравнения $\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)\left(3\cos x+4\right)=0$, удовлетворяющие неравенству $tgx>0$
Вариант 5 1. Решите уравнение $2\sin x\cos x=\frac{1}{2}$ 2. Найдите все корни уравнения $3tg^2 x=1$, удовлетворяющие неравенству $\sin x<0$	Вариант 6 1. Решите уравнение $tgx+\sin x=0$ 2. Решите уравнение $\frac{2\sin x-\sqrt{3}}{2\cos x+1}=0$
Вариант 7 1. Решите уравнение $ctgx-\cos x=0$ 2. Решите уравнение $\frac{\sin 2x}{tgx}=\cos x$	Вариант 8 1. Решите уравнение $\cos(\pi+x)=\sin\frac{\pi}{2}$ 2. Решите уравнение $\frac{\sin 3x}{\sin x}=0$
Вариант 9 1. Решите уравнение $2\cos 2x+\sqrt{5}\sin x=0$ 2. Решите уравнение $\frac{4tg^2 x-3tgx}{5\sin^2 x+3\sin x}=0$	Вариант 10 1. Решите уравнение $\left(tg^2 x+1\right)tgx=-\frac{1}{\cos^2 x}$ 2. Решите уравнение $\frac{3ctg^2 x+4ctgx}{5\cos^2 x-4\cos x}=0$

Ответы:

Вариант 1. 1. $\pi+4\pi n, n\in Z$; 2. $\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{2\pi}{3}+2\pi l, k,l\in Z$

Вариант 2. 1. $-\frac{\pi}{18}+\frac{2}{3}\pi n; -\frac{5\pi}{18}+\frac{2}{3}\pi k, n,k\in Z$; 2. $\frac{5\pi}{4}+2\pi m, m\in Z$

Вариант 3. 1. $(-1)^n\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$; 2. $-\frac{\pi}{2}+2\pi k; -\frac{5\pi}{6}+2\pi m, k,m\in Z$

Вариант 4. 1. $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$; 2. $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$

Вариант 5. 1. $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n, n\in Z$; 2. $-\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{7\pi}{6}+2\pi m, k,m\in Z$

Вариант 6. 1. $\pi n, n\in Z$; 2. $\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$

Вариант 7. 1. $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$; 2. $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$

Вариант 8. 1. $\pi+2\pi n, n\in Z$; 2. $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$

Вариант 9. 1. $(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{5}-\sqrt{37}}{8}+\pi k, k\in Z$; 2. $arctg\frac{3}{4}+2\pi n, n\in Z$

Вариант 10. 1. $-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$; 2. $\pi-arcctg\frac{4}{3}+2\pi n, n\in Z$

Домашнее задание

1. $\frac{4\cos^2 2x-1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\left(\sin^2 x-0{,}25\right)}=0$ Ответ: $\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$.

2. $\frac{1-\cos x+\sin x}{\cos x}=0$ Ответ: $2\pi n, n\in Z$.

3. $\frac{\sin x+\cos x}{\cos x+\cos 3x}=1$ Ответ: $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$.

4. $\frac{\cos 2x-\sin x-1}{2\cos x-\sqrt{3}}=0$ Ответ: $\pi k; -\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n,k\in Z$.

5. $\frac{\sin 3x}{\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}=-1$ Ответ: $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}; k\in Z$.

Решение примера 5.

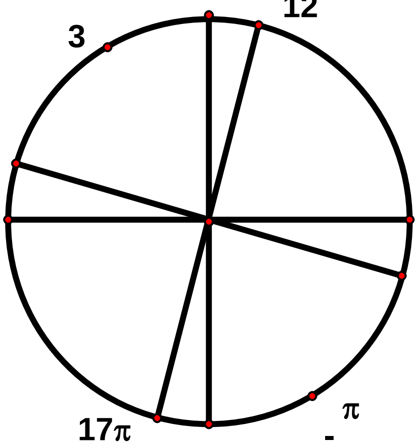
$$\frac{\sin 3x}{\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}=-1$$

Преобразуем данное уравнение следующим образом: $\frac{\sin 3x}{\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}+1=0$

$$\frac{\sin 3x+\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}=0$$

$$\begin{cases}\sin 3x+\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0\\ \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\neq 0\end{cases}\quad \begin{cases}\sin 3x+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0,\\ \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\neq 0\end{cases}\quad \begin{cases}2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0,\\ \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\neq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=0,\\ \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\neq 0\end{cases}\quad \begin{cases}2x+\frac{\pi}{6}=\pi k\\ x-\frac{\pi}{6}\neq\frac{\pi}{2}+\pi n; k,n\in Z\end{cases}\quad \begin{cases}x=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k,\\ x\neq\frac{2\pi}{3}+\pi n,\end{cases}\quad x=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$$



Ответ: $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$.

Занятие 2. Решение тригонометрических уравнений

1. Проверка домашнего задания.

2. Вспоминаем тригонометрические формулы, необходимые нам для решения С1, и простейшие тригонометрические уравнения.

3. Устные упражнения.

Оцените решение задания С1 одним из учеников. Что бы вы поставили за это решение?

1. Решите уравнение $(2\cos x+1)\left(\sqrt{-\sin x}-1\right)=0$

Решение.

1) $2\cos x+1=0$; $\cos x=-\dfrac{1}{2}$; $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$

2) $\begin{cases}\sqrt{-\sin x}-1=0,\\ -\sin x\geq 0\end{cases}$; $\begin{cases}\sin x=-1,\\ \sin x\leq 0\end{cases}$; $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$

Ответ: $\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z; -\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z.$

К о м м е н т а р и й: Верно решены оба уравнения $2\cos x+1=0$ и $\sqrt{-\sin x}-1=0$. Неравенство $\sin x\leq 0$, верно использованное во втором случае, никак не учитывалось в первом случае, то есть нет никакой попытки отбора.

Оценка эксперта: 1 балл.

2. $(2\cos x+1)\left(\sqrt{-\sin x}-1\right)=0$

Решение.

$2\cos x+1=0$ $\sqrt{-\sin x}-1=0$

$\cos x=\dfrac{1}{2}$ $-\sin x\geq 0$; $\sin x\leq 0$

$x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$ $\sin x=-1$; $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$

При $x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$ $\sin x>0$, значит $\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$ — посторонний корень.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n; -\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, n,k\in Z$.

К о м м е н т а р и й: В целом довольно грамотное решение. Верно произведен учет условия $\sin x \le 0$. Все замечательно и с решением уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$.

Неприятность в том, что потерян минус: должно стоять $\cos x = -\frac{1}{2}$. Поэтому теряет смысл и верно произведенный затем отбор: он произведен из неверного множества решений.

Оценка эксперта: 0 баллов.

3. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)=\cos x$ $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$

Решение.

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)=-\sin 2x$$

$$-\sin 2x=\cos x \Leftrightarrow (2\sin x+1)\cos x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi n, x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi k;(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, k,n\in Z$.

Отбор: 1) из серии $\frac{\pi}{2}+\pi k$ на отрезке принадлежат $\frac{5\pi}{2};\frac{7\pi}{2}$

2) из серии $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$ $\frac{7\pi}{6}+\pi=\frac{13\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{6}+4\pi=\frac{23\pi}{6}$;

$$\frac{5\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}=\frac{19\pi}{6}$$

Ответ: б) $\frac{5\pi}{2};\frac{7\pi}{2};\frac{13\pi}{6};\frac{23\pi}{6};\frac{19\pi}{6}$.

Оценка эксперта: 0 баллов

К о м м е н т а р и й: Ответ в пункте *б* неверен, а отбор по имеющейся из пункта *а* формуле и неполон, и неверен. Поэтому 2 балла ставить нельзя. Тем не менее ответ в пункте *а* верен и этот факт (к сожалению) для некоторых экспертов есть основание для выставления 1 балла. Однако, этот верный ответ получен в результате двойной ошибки: равенство $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)=-\sin 2x$ неверно и неверно решено уравнение $\sin x=-\frac{1}{2}$.

Д о п о л н и т е л ь н о:

Предложить метод решения уравнений

1. $\cos^2 3x=\frac{1}{2}$ (использовать формулу понижения степени $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$)

2. $\sin 2x=3\cos x$ (метод разложения на множители с использованием формулы $\sin 2x=2\sin x\cos x$)

3. $\sin x-\cos x=0$ (линейное однородное уравнение)

4. $\sin x+\cos x=-1$ (метод введения дополнительного угла)

5. $\frac{\cos 4x}{\sin 2x}=\frac{\sin 4x}{\cos 2x}$ (использовать формулу косинус суммы двух углов)

6. $\frac{\cos 2x-\sin x-1}{2\cos x-\sqrt{3}}=0$ (сведение к квадратному уравнению относительно синуса и последующий отбор).

Работа в классе

1. $\frac{4\cos 2x-9\sin x-4}{\sqrt{-\cos x}}=0$

Решение.

$$\begin{cases}4\left(1-2\sin^2 x\right)-9\sin x-4=0,\\ -\cos x>0;\end{cases}$$

1) $-8\sin^2 x-9\sin x=0$; $\sin x\left(-8\sin x-9\right)=0$; $\sin x=0$ или $\sin x=-\frac{9}{8}$; $x=\pi n, n\in Z$

2) $\begin{cases}x=\pi n, n\in Z\\ \cos x<0\end{cases}$

$x=\pi+2\pi n, n\in Z$.

Ответ: $\pi+2\pi n, n\in Z$.

2. $\frac{10\sin^2 x-3\sin x-4}{\sqrt{tgx}}=0$

Решение.

$$\begin{cases} 10\sin^2 x - 3\sin x - 4 = 0, \\ tgx > 0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{4}{5}, \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \end{array} \right. \\ tgx > 0 \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \arcsin\dfrac{4}{5} + 2\pi n, \\ x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in Z \end{array} \right.$$

Ответ: $\arcsin\dfrac{4}{5} + 2\pi n, -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in Z$.

3. $\sqrt{\sin x \cos x}\left(\dfrac{1}{tg 2x} + 1\right) = 0$

Решение.

1) $\sin x \cos x = 0$ 2) $\dfrac{1}{tg 2x} = -1$

$\begin{cases} \sin 2x = 0, \\ tg 2x \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} tg 2x = -1, \\ \sin 2x > 0 \end{cases}$

нет решений $\begin{cases} 2x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z, \\ \sin 2x > 0 \end{cases}$; $2x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$; $x = \dfrac{3\pi}{8} + \pi n, n \in Z$

Ответ: $\dfrac{3\pi}{8} + \pi n, n \in Z$.

4. Решите уравнение $\cos 2x + \sin^2 x = 0{,}25$. Укажите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \dfrac{9\pi}{2}\right]$.

Решение.

$\cos^2 x = \dfrac{1}{4}$; $\cos x = \pm\dfrac{1}{2}$; $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$

$3\pi \le \dfrac{\pi}{3} + \pi n \le \dfrac{9\pi}{2}$, $3\pi \le -\dfrac{\pi}{3} + \pi n \le \dfrac{9\pi}{2}$

$\dfrac{8}{3} \le n \le \dfrac{25}{6}$ $\dfrac{10}{3} \le n \le \dfrac{29}{6}$

$n = 3, n = 4$ $n = 4$

$x = \dfrac{10}{3}\pi; x = \dfrac{13}{3}\pi$ $x = \dfrac{11\pi}{3}$

Ответ: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$; $\dfrac{10\pi}{3}; \dfrac{11\pi}{3}; \dfrac{13\pi}{3}$.

Самостоятельная работа № 2

Вариант 1 1. Решите уравнение $4\sin x\cdot\cos x-\sqrt{3}=0$ 2. Решите уравнение $\left(2\sin^2 x+11\sin x+5\right)\sqrt{-4\cos x}=0$	Вариант 2 1. Решите уравнение $\sin 2x\cdot\cos 2x=\frac{1}{4}$ 2. Решите уравнение $\left(2\sin^2 x-3\sin x-2\right)\sqrt{5\cos x}=0$
Вариант 3 1. Решите уравнение $\cos^2 3x-\sin^2 3x=1$ 2. Решите уравнение $\frac{2\sin^2 x-7\sin x-4}{\sqrt{-3tgx}}=0$	Вариант 4 1. Решите уравнение $\sin^2 4x-\cos^2 4x=0$ 2. Решите уравнение $\left(2\cos^2 x+7\cos x-4\right)\sqrt{-3tgx}=0$
Вариант 5 1. Решите уравнение $1+tg^2 x=\frac{2}{\cos x}$ 2. Решите уравнение $\left(8\cos^2 x-4\right)\sqrt{3\sin x}=0$	Вариант 6 1. Решите уравнение $1+ctg^2 x=\frac{1}{\sin x}$ 2. Решите уравнение $\frac{2\cos^2 x+3\cos x-2}{\sqrt{7\sin x}}=0$
Вариант 7 1. Решите уравнение $7\sin^2 x+6\cos^2 x=7$ 2. Решите уравнение $\frac{4\sin^2 x-12\sin x+5}{\sqrt{-3\cos x}}=0$	Вариант 8 1. Решите уравнение $8\sin^2 x+10\cos^2 x=9$ 2. Решите уравнение $\left(4\cos^2 x+12\sin x+5\right)\sqrt{-4\sin x}=0$
Вариант 9 1. Решите уравнение $2\cdot\left(\sin^4 x-\cos^4 x\right)=\sqrt{2}$ 2. Решите уравнение $\frac{4\cos^2 x-11\cos x+5}{\sqrt{-4\sin x}}=0$	Вариант 10 1. Решите уравнение $\cos^4 x=0{,}5+\sin^4 x$ 2. Решите уравнение $\frac{2\cos^2 x+3\sin x-3}{\sqrt{-4tgx}}=0$

Ответы:

Вариант 1. 1. $(-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z;$ 2. $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi k; n, k \in Z$

Вариант 2. 1. $(-1)^n \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z;$ 2. $\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; n, k \in Z$

Вариант 3. 1. $\frac{\pi}{3} n, n \in Z;$ 2. $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

Вариант 4. 1. $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{8} n, n \in Z;$ 2. $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \pi k; n, k \in Z$

Вариант 5. 1. $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$; 2. $\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \pi l; n, k, l \in Z$

Вариант 6. 1. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$ 2. $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

Вариант 7. 1. $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$ 2. $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$

Вариант 8. 1. $\pm\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z;$ 2. $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n; \pi k; n, k \in Z$

Вариант 9. 1. $\pm\frac{3\pi}{8} + \pi n, n \in Z;$ 2. $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

Вариант 10. 1. $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z;$ 2. $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$

Домашнее задание

1. $\frac{4\sin^2 x - 2}{\sqrt{-3\cos x}\sqrt{-2tgx}} = 0$ Ответ: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; n \in Z$.

2. $\frac{2\cos^2 x + \cos x}{\sqrt{tgx + 1}} = 0$ Ответ: $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$.

3. $\frac{\sin 2x - 2\sin x - \cos x + 1}{\sqrt{-2tgx}} = 0$ Ответ: $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$.

4. $\left(2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x\right)\sqrt{11tgx} = 0$ Ответ: $\pi n; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; n, k \in Z$.

5. $\left(\sqrt{3}tgx + 1\right)\sqrt{-17\cos x} = 0$ Ответ: $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$.

Занятие 3. Отбор корней в тригонометрических уравнениях

Устно

1. Решите уравнение $\sqrt{9-x^2}\cos x=0$ Ответ: $\pm 3; \pm\frac{\pi}{2}$.

2. Решите уравнение $3\sin x=\pi$ Ответ: нет решений.

3. Решите уравнение $\cos x^2=1$ Ответ: $\pm\sqrt{2\pi k}, k\geq 0, k\in Z$.

4. Решите уравнение $\frac{(2x-9\pi)(5x-9\pi)(8x-9\pi)}{\sqrt{\cos x}}=0$ Ответ: $\frac{9}{5}\pi$.

5. Решите уравнение $\sin\sin x=1$ Ответ: нет решений.

6. Оцените решение учащегося от 0 до 2 баллов.

$(2\sin x-1)\left(\sqrt{-\cos x}+1\right)=0$

Решение.

1) $2\sin x-1=0$; $\sin x=\frac{1}{2}$; $x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+\pi n, n\in Z$; $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$

2) $\sqrt{-\cos x}+1=0$ не имеет решений, так как под корнем не может быть отрицательного числа.

Ответ: $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$.

Оценка эксперта: 1 балл

7. Оцените решение учащегося от 0 до 2 баллов.

$(2\sin x-1)\left(\sqrt{-\cos x}+1\right)=0$

Решение.

$2\sin x-1=0$ или $\sqrt{-\cos x}+1=0$

$\sin x=\frac{1}{2}$ $\sqrt{-\cos x}=-1$

$x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{2}+\pi n, n\in Z$ $\left(\sqrt{-\cos x}\right)^2=(-1)^2$

$x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$ $-\cos x=1$; $\cos x=-1$; $x=\pi+2\pi n, n\in Z$.

Ответ: $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$; $\pi+2\pi n, n\in Z$.

Оценка эксперта: 0 баллов

8. Оцените решение учащегося от 0 до 2 баллов.

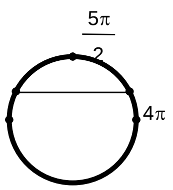
$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)=\cos x \quad \left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$

Решение.

а) $\sin 2x=\cos x$; $2\sin x\cos x=\cos x$; $\cos x(2\sin x-1)=0$; $\cos x=0$ или $\sin x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi k \quad x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$

б) $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$



$\frac{7\pi}{2};\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{2}$

Оценка эксперта: 1 балл

К о м м е н т а р и й: В пункте *а* решение верно и обосновано, ответ верен, разве что не хватает $k\in Z, n\in Z$, но только за это снизить оценку вряд ли нужно. Так что 1 балл есть. Ответ в пункте *б* неверен и ясно, что произошла ошибка: в ответ из картинки включен основной корень $\frac{5\pi}{6}$, явно меньший $\frac{5\pi}{2}$, а следовало бы включить $\frac{5\pi}{6}+2\pi=\frac{17\pi}{6}$.

Работа в тетради

1. Сколько решений имеет уравнение $(\sin x-\cos x)^2\sqrt{9-x^2}=0$?

Решение.

$\begin{cases}\sin x-\cos x=0,\\ 9-x^2>0\end{cases} \quad 9-x^2=0$

$\begin{cases}tgx=1,\\ -3<x<3\end{cases} \quad x=\pm 3$

$\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z,\\ -3<x<3\end{cases}$

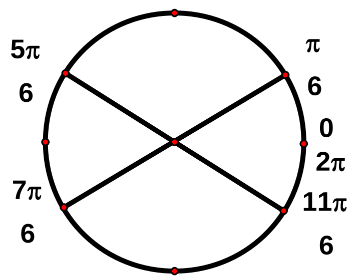
$x=\frac{\pi}{4}; x=-\frac{3\pi}{4}\quad x=3; x=-3$

Ответ: 4.

2. Определите число корней уравнения $tgx\cos x=\sin x+\cos 3x$ на отрезке $[0;2\pi]$.

Решение.

$\begin{cases}\cos 3x=0,\\ \cos x\neq 0\end{cases}\quad \begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n, n\in Z,\\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z\end{cases}$



Ответ: 4.

3. Найдите количество целочисленных решений неравенства $7-5x-2x^2\geq 0$, удовлетворяющих условию $3+ctg^2\frac{\pi x}{2}>0$

Решение.

1. $7-5x-2x^2\geq 0\quad -\frac{7}{2}\leq x\leq 1$

2. $\sin\frac{\pi x}{2}\neq 0; \frac{\pi x}{2}\neq\pi n, n\in Z; x\neq 2n; x=-3;-1;1$

Ответ: 3.

4. Решите уравнение $\frac{\sin^4(\pi x)-\cos^4(\pi x)}{\sqrt{5x-3-2x^2}}=0$

Решение.

$\begin{cases}\cos(2\pi x)=0,\\ 1<x<1{,}5\end{cases}\quad \begin{cases}x=\frac{1}{4}+\frac{n}{2}, n\in Z\\ 1<x<1{,}5\end{cases}\quad n=2, x=1{,}25$

Ответ: $1{,}25$.

5. Найти все x, удовлетворяющие уравнению $\sqrt{49-4x^2}\cdot\left(\sin\pi x+3\cos\frac{\pi x}{2}\right)=0$.

Решение.

$$\begin{cases} 49-4x^2>0, \\ \sin\pi x+3\cos\dfrac{\pi x}{2}=0 \end{cases} \quad 49-4x^2=0$$

$$\begin{cases} -\dfrac{7}{2}<x<\dfrac{7}{2}, \\ \cos\dfrac{\pi x}{2}\left(2\sin\dfrac{\pi x}{2}+3\right)=0 \end{cases} \quad x=\pm\dfrac{7}{2}$$

$$\begin{cases} -3{,}5<x<3{,}5; \\ \cos\dfrac{\pi x}{2}=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} -3{,}5<x<3{,}5; \\ x=1+2k, k\in Z \end{cases} \quad x=\pm1; x=\pm3$$

Ответ: $\pm1;\pm3;\ \pm\dfrac{7}{2}$.

6. Решите уравнение $(2\sin x-1)\sqrt{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}=0$

Решение.

$$\begin{cases} 2\sin x-1=0, \\ \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)>0 \end{cases} \quad \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in Z \end{array}\right. \\ \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)>0 \end{cases} \quad x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z; \quad x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$$

Если $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$, то $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}+2\pi n\right)=\cos\dfrac{5\pi}{12}>0;$

Если $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n$, то $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}+2\pi n\right)=\cos\dfrac{13\pi}{12}<0.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$; $\dfrac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$.

7. Найти все решения уравнения $\sqrt{x+\sin x}=\sqrt{x-\sin 2x}$, удовлетворяющие неравенству $-2\pi<x<2\pi$.

Решение.

$$\begin{cases} x+\sin x \ge 0, \\ x+\sin x = x-\sin 2x \end{cases} \begin{cases} x+\sin x \ge 0, \\ \sin x+\sin 2x = 0 \end{cases} \begin{cases} x+\sin x \ge 0, \\ \sin x(1+2\cos x) = 0 \end{cases} \begin{cases} x+\sin x \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+\sin x \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = \pi k \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, k \in Z. \end{array}\right. \end{cases}$$

Среди решений уравнения условию $-2\pi < x < 2\pi$ удовлетворяют значения $x = 0, \pm\pi, \pm\dfrac{2\pi}{3}, \pm\dfrac{4\pi}{3}$.

Среди этих значений x условию $x+\sin x \ge 0$ удовлетворяют $x = 0, x = \pi, x = \dfrac{2\pi}{3}, x = \dfrac{4\pi}{3}$.

Ответ: $0, \pi, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}$.

8. Решите уравнение $\sqrt{2}\sin^3 x - \sqrt{2}\sin x + \cos^2 x = 0$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Решение.

$\sqrt{2}\sin^3 x - \sin^2 x - \sqrt{2}\sin x + 1 = 0$; $t = \sin x$, $t \in [-1;1]$; $\sqrt{2}t^3 - t^2 - \sqrt{2}t + 1 = 0$

$\sqrt{2}t(t^2-1) - (t^2-1) = 0$; $(t-1)(t+1)(\sqrt{2}t-1) = 0$; $t = 1, t = -1, t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin x = \pm 1$, $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$; $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

$-\dfrac{5\pi}{2} \le \dfrac{\pi}{2} + \pi k \le -\pi$ $\quad -\dfrac{5\pi}{2} \le \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n \le -\pi$ $\quad -\dfrac{5\pi}{2} \le \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n \le -\pi$

$-3 \le k \le -\dfrac{3}{2}$ $\quad -\dfrac{11}{8} \le n \le -\dfrac{5}{8}$ $\quad -\dfrac{13}{8} \le n \le -\dfrac{7}{8}$

$k = -3; k = -2$ $\quad n = -1$ $\quad n = -1$

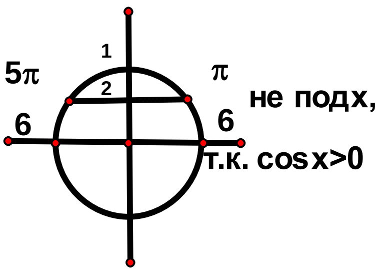
$x = -\dfrac{5\pi}{2}; x = -\dfrac{3\pi}{2}$ $\quad x = -\dfrac{7\pi}{4}$ $\quad x = -\dfrac{5\pi}{4}$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$; $(-1)^n \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$; $-\dfrac{5\pi}{2}; -\dfrac{3\pi}{2}; -\dfrac{7\pi}{4}; -\dfrac{5\pi}{4}$.

Самостоятельная работа № 3

Вариант 1	Вариант 2
1. $\left(2\sin^2 x-5\sin x+2\right)\sqrt{-53\cos x}=0$ 2. Оцените решение учащегося от 0 до 2 баллов. $\left(2\sin x-1\right)\left(\sqrt{-\cos x}+1\right)=0$ Решение. $\begin{cases}2\sin x-1=0\\ \sqrt{-\cos x}+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=\frac{1}{2}\\ \sqrt{-\cos x}=-1\end{cases}\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\sin x=\frac{1}{2}\\ -\cos x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=\frac{1}{2}\\ \cos x=-1\end{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z\\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z\\ x=\pi+2\pi p, p\in Z\end{array}\right.$ Ответ: $\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ \pi+2\pi p$ $\{n,k,p\}\in Z$	1. $\frac{3\cos^2 x+2\cos x}{2tgx-3}=0$ 2. Оцените решение учащегося от 0 до 2 баллов. $\left(2\sin x-1\right)\left(\sqrt{-\cos x}+1\right)=0$ Решение. $\sqrt{-\cos x}\geq 0\Rightarrow\sqrt{-\cos x}+1\neq 0$ $2\sin x-1=0\Rightarrow x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$ Ответ: $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$
Вариант 3	**Вариант 4**
1. $\frac{\sin 2x+2\sin^2 x}{\sqrt{-\cos x}}=0$ 2. Оцените решение учащегося от 0 до 2 баллов. $\left(2\sin x-1\right)\left(\sqrt{-\cos x}+1\right)=0$ Решение. 1) $\cos x\leq 0$ 2) $2\sin x-1=0\Leftrightarrow\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$ $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$ $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$	1. $\frac{\sin x-\sin 2x}{\sqrt{2\cos x-1}}=0$ 2. Оцените решение учащегося от 0 до 2 баллов. $\left(2\sin x-1\right)\left(\sqrt{-\cos x}+1\right)=0$ Решение. 1) $2\sin x-1=0$ $\sin x=\frac{1}{2}$ $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$ 2) $\sqrt{-\cos x}+1=0$

Если $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$, то $\cos x>0$ Если $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, то $\cos x<0$ 3) $\sqrt{-\cos x}+1=0 \Leftrightarrow \sqrt{-\cos x}=-1$, это не может быть Ответ: $\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$	$\sqrt{-\cos x}=-1$, возведем обе части в квадрат $-\cos x=1$ $\cos x=-1$ $x=\pi+2\pi k, k\in Z$ Ответ: $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$; $\pi+2\pi k, k\in Z$
Вариант 5 1. $\frac{2\sin^2 x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}=0$ 2. Оцените решение учащегося от 0 до 2 баллов. $(2\sin x-1)\left(\sqrt{-\cos x}+1\right)=0$ Решение. 1) $2\sin x-1=0$ $\sin x=\frac{1}{2}$ $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$ 2) $\sqrt{-\cos x}+1=0$ $\sqrt{-\cos x}=-1$ решений нет Ответ: $\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$	Вариант 6 1. $\frac{4\cos^2 x-8\cos x-5}{\sqrt{3}+tgx}=0$ 2. Оцените решение учащегося от 0 до 2 баллов. $(2\sin x-1)\left(\sqrt{-\cos x}+1\right)=0$ Решение. $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}2\sin x-1=0\\ \sqrt{-\cos x}+1=0\end{array}\right.\\ \cos x\le 0\end{cases}$ $\sin x=\frac{1}{2}$ $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$ Уравнение $\sqrt{-\cos x}+1=0$ решений не имеет. Ответ: $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$
Вариант 7 1. $\frac{6\sin^2 x+7\sin x-5}{\sqrt{3}\cdot tgx-1}=0$ 2. Оцените решение учащегося от 0 до 2 баллов	Вариант 8 1. $\frac{\cos 2x+\sin x}{\sqrt{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}=0$ 2. Оцените решение учащегося от 0 до 2 баллов

$(2\cos x+1)\left(\sqrt{-\sin x}-1\right)=0$ Решение. Если $\sqrt{-\sin x}-1=0$, то $\sin x=-1$ $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$ Если $2\cos x+1=0$, то $\cos x=-\frac{1}{2}$ $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$ ОДЗ $-\sin x\ge 0$ $\sin x\le 0$ $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$ не подходит по ОДЗ Ответ: $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$	$(2\cos x+1)\left(\sqrt{-\sin x}-1\right)=0$ Решение. $2\cos x=-1$ или $\sqrt{-\sin x}=1$ $\cos x=-\frac{1}{2}$ $-\sin x=1$ $x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$ $x=-\frac{\pi}{2}$ Ответ: $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z, -\frac{\pi}{2}$
Вариант 9 1. $\frac{\sin 2x-\cos x}{\sqrt{4\sin x-2}}=0$ 2. Оцените решение учащегося от 0 до 2 баллов. $(2\cos x+1)\left(\sqrt{-\sin x}-1\right)=0$ Решение. $\left[\begin{array}{l}2\cos x+1=0\\ \sqrt{-\sin x}-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-\sin x\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}\cos x=-\frac{1}{2}\\ -\sin x=1\end{array}\right.\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}\sin x\le 0\\ \left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k\\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k\\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z\end{array}\right.$ Ответ: $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k, -\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$	Вариант 10 1. $\sqrt{x^2+x+2}\left(\sin 2x-\pi\cos x\right)=0$ 2. Оцените решение учащегося от 0 до 2 баллов. $(2\sin x-1)\left(\sqrt{-\cos x}+1\right)=0$ Решение. ОДЗ $-\cos x\ge 0$ $\cos x\le 0$ $2\sin x-1=0$ $\sin x=\frac{1}{2}$  Ответ: $\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$

Ответы:

Вариант 1. 1. $\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi k; n,k \in Z$;

2. 0

Вариант 2. 1. $\pm\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+2\pi n; n \in Z$;

2. 1

Вариант 3. 1. $\pi+2\pi n, n \in Z$;

$\frac{3\pi}{4}+2\pi k, k \in Z$; 2. 2;

Вариант 4. 1. $2\pi n, n \in Z$; 2. 0

Вариант 5. 1. $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n \in Z$; 2. 0

Вариант 6. 1. $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n \in Z$; 2. 1

Вариант 7. 1. $\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n \in Z$; 2. 2

Вариант 8. 1. $\frac{\pi}{2}+2\pi n, n \in Z$;

-$\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k \in Z$; 2. 0

Вариант 9. 1. $\frac{\pi}{2}+2\pi n, n \in Z$; 2. 2

Вариант 10. 1. $\frac{\pi}{2}+\pi n, n \in Z$; 2. 2

Домашнее задание

1. $\left(tgx-\sqrt{3}\right)\sqrt{37\cos x}=0$. Ответ: $\frac{\pi}{3}+2\pi n; n \in Z$.

2. Определите число корней уравнения $tgx\cos x-\sin x=\sin 2x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right]$.

Ответ: 1

3. Найдите число корней уравнения $\cos^2\left(\sqrt{16-x^2}\right)=1$.

Ответ: 4

4. Решите уравнение $\left(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\sqrt{3x^2-7x+4}=0$.

Ответ: $1; \frac{4}{3}; (-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n, n \in Z, n \neq 0$.

5. Решите уравнение $\frac{tg^2x-\sqrt{3}tgx}{\sqrt{-15\sin x}}=0$.

Ответ: $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; n \in Z$.

Занятие 4. Применение свойств функций при решении уравнений

Устно

1. Решите уравнение $(x-3)(x-6)\cdot 9^{\sqrt{x-4}}=0$. Ответ: 6.

2. Решите уравнение $\frac{(5^x-25)(7^{-x}-7)}{\sqrt{5-7x}}=0$. Ответ: -1.

3. Решите уравнение $\frac{(x-16)(x+19)}{\log_{12}(x+17)}=0$. Ответ: 16.

4. Решите уравнение $36\sqrt{x+3}-x^2\sqrt{x+3}=0$. Ответ: 6; -3.

5. Решите уравнение $(x-4)(4-\cos x)+4-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=0$. Ответ: 3.

6. Решите уравнение $\log_2\left(4-(2x-3)^2\right)=3+\cos 2\pi x$. Ответ: $\frac{3}{2}$.

7. Оцените решение учащегося от 0 до 2 баллов.

Решите уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)=\cos x$.

Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

Решение.

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)=\sin 2x$; $\sin 2x=\cos x \Leftrightarrow 2\sin x\cdot\cos x=\cos x$

1) $\cos x=0$ 2) $2\sin x=1$

$(-1)^n\cdot\frac{\pi}{2}+\pi n$ $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$

Отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$ принадлежат углы $\frac{5\pi}{2};\frac{7\pi}{2};\frac{5\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$;

б) $\frac{5\pi}{2};\frac{7\pi}{2};\frac{17\pi}{6}$.

Оценка эксперта: 1 балл

Работа в тетради

1. Решите уравнение $x^2-\pi x+\frac{\pi^2}{4}=\sin x-1$

Решение.

$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2=\sin x-1$; $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\geq 0$, $\sin x-1\leq 0$ для любого x

$\begin{cases} x-\frac{\pi}{2}=0, \\ \sin x-1=0 \end{cases}$ $x=\frac{\pi}{2}$

2. Решите уравнение $2\cos^2(x\sin x)=2+\left|\log_2\left(x^2-4x+1\right)\right|$

Решение.

Так как $2\cos^2(x\sin x)\leq 2,$ а $2+\left|\log_2\left(x^2-4x+1\right)\right|\geq 2$, то $\begin{cases} \cos^2(x\sin x)=1 \\ \log\left(x^2-4x+1\right)=0 \end{cases}$

$\begin{cases} \cos(x\sin x)=\pm 1 \\ x^2-4x=0 \end{cases}$ $x=0$

Ответ: 0.

3. Решите уравнение $\sin\frac{5\pi x}{4}=x^2-4x+5$

Решение.

Так как $x^2-4x+5=(x-2)^2+1\geq 1$ при любом $x\in R$ и $\sin\frac{5\pi x}{4}\leq 1$ при любом $x\in R$,

то уравнение может иметь решения, только если $\begin{cases} (x-2)^2+1=1 \\ \sin\frac{5\pi x}{4}=1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases} x=2, \\ \sin\frac{5\pi x}{4}=1 \end{cases}$

$x=2$

Ответ: 2.

4. Решите уравнение $\cos\left(\pi\sqrt{x}\right)\cos\left(\pi\sqrt{x-4}\right)=1$

Решение.

$\begin{cases} \cos\left(\pi\sqrt{x}\right)=1 \\ \cos\left(\pi\sqrt{x-4}\right)=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} \cos\left(\pi\sqrt{x}\right)=-1 \\ \cos\left(\pi\sqrt{x-4}\right)=-1 \end{cases}$

$\begin{cases} \pi\sqrt{x}=2\pi k, k\geq 0, k\in Z \\ \pi\sqrt{x-4}=2\pi n, n\geq 0, n\in Z \end{cases}$ нет решений

$\begin{cases} x=4k^2, \\ x=4+4n^2 \end{cases}$

$4k^2=4n^2+4$

$(k-n)(k+n)=1$

$k=1, n=0, x=4$

Ответ: 4.

5. Решите уравнение $\log_2\left(5+3\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sin^2\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$

Решение.

Так как $-1\le\cos\alpha\le 1$ и $-3\le 3\cos\alpha\le 3$, то $3\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\ge -3$.

$5+3\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\ge 2$ и $\log_2\left(5+3\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\right)\ge 1$, а $\sin^2\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)\le 1$.

Уравнение может иметь решения, только если $\begin{cases}\log_2\left(5+3\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\right)=1,\\ \sin^2\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)=1\end{cases}$

$$\begin{cases}5+3\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=2\\ 1-\cos\left(4x-\frac{4\pi}{3}\right)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-1,\\ \cos\left(4x-\frac{4\pi}{3}\right)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-\frac{\pi}{4}=\pi+2\pi n, n\in Z\\ 4x-\frac{4\pi}{3}=\pi+2\pi k, k\in Z\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3},\\ x=\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}\end{cases}\quad x=\frac{13\pi}{12}+2\pi k, k\in Z$$

$\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3}=\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$; $5+8n=7+6k$; $8n-6k=2$; $4n-3k=1$

$$\begin{cases}n_0=1\\ k_0=1\end{cases}\quad\begin{cases}n=1+3t,\\ k=1+4t\end{cases}$$

Ответ: $\frac{13\pi}{12}+2\pi k, k\in Z$.

6. Решите уравнение $\sqrt{81-(2x-3)^2}=9+\sin^2\frac{2\pi x}{3}$

Решение.

$\sqrt{81-(2x-3)^2}\le 9$, $9+\sin^2\frac{2\pi x}{3}\ge 9$ для любого $x\in R$

$$\begin{cases}\sqrt{81-(2x-3)^2}=9,\\ 9+\sin^2\dfrac{2\pi x}{3}=9\end{cases}\quad \begin{cases}2x-3=0,\\ \sin\dfrac{2\pi x}{3}=0\end{cases}\quad x=\frac{3}{2}.$$ Ответ: $1{,}5$.

7. Решите уравнение $x^2+6x+11=\log_2\left(3-\sin\dfrac{\pi x}{6}\right)$

Решение.

$x^2+6x+11=(x+3)^2+2\ge 2$; $2\le 3-\sin\dfrac{\pi x}{6}\le 4$; $1\le\log_2\left(3-\sin\dfrac{\pi x}{6}\right)\le 2$

$$\begin{cases}(x+3)^2+2=2,\\ \log_2\left(3-\sin\dfrac{\pi x}{6}\right)=2\end{cases}\quad \begin{cases}x=-3,\\ 3-\sin\dfrac{\pi x}{6}=4\end{cases}\quad x=-3.$$ Ответ: -3.

8. Решите уравнение $10x-x^2-9=4^{\cos\pi x+3}$

Решение.

$10x-x^2-9=-(x^2-10x+25)+16=-(x-5)^2+16\le 16$; $2\le\cos\pi x+3\le 4$; $4^{\cos\pi x+3}\ge 16$

$$\begin{cases}16-(x-5)^2=16,\\ 4^{\cos\pi x+3}=4^2\end{cases}\quad x=5.$$ Ответ: 5.

Самостоятельная работа № 4

Вариант 1	Вариант 2
1. Решите уравнение $\sqrt{4-(2x+5)^2}=\sin^2\dfrac{4\pi x}{5}+2$ 2. Решите уравнение $(\cos 2x-3\sin x+1)\sqrt{-23\cos x}=0$	1. Решите уравнение $\sqrt{(2x+3)^2+16}=4-\sin^2\dfrac{4\pi x}{3}$ 2. Решите уравнение $(2\cos 2x-4\sin x+1)\sqrt{-63\cos x}=0$
Вариант 3	**Вариант 4**
1. Решите уравнение $2^{(\sqrt{3}-\sin 10\pi x)(\sqrt{3}+\sin 10\pi x)}=8+(5x-1)^2$ 2. Решите уравнение $\dfrac{81^{\cos x}-4\cdot 9^{\cos x}+3}{tgx+\sqrt{3}}=0$	1. Решите уравнение $3^{(\sqrt{2}-\cos\pi x)(\sqrt{2}+\cos\pi x)}=9+(1-2x)^2$ 2. Решите уравнение $\dfrac{3\cdot 81^{\cos x}-4\cdot 9^{\cos x}+1}{tgx-\sqrt{3}}=0$

Вариант 5 1. Решите уравнение $x^2-6x+10=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi x}{9}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi x}{9}$ 2. Решите уравнение $\left(\sqrt{-tgx}-\sqrt[4]{3}\right)\left(2\cos^2 x+3\cos x-2\right)=0$	Вариант 6 1. Решите уравнение $4x-x^2-5=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi x}{8}+\sin\frac{5\pi x}{8}\right)$ 2. Решите уравнение $\left(6\sin^2 x+7\sin x-5\right)\sqrt{-\cos x}=0$
Вариант 7 1. Решите уравнение $\lg\left(x^2+1\right)+1=\cos\pi x$ 2. Решите уравнение $\left(\sqrt{-tgx}-1\right)\left(2\sin^2 x+5\sin x-3\right)=0$	Вариант 8 1. Решите уравнение $\log_3{}^2(x-5)-\cos\frac{\pi x}{3}+1=0$ 2. Решите уравнение $\frac{2\sin^2 x+2\sin x\cos 2x-1}{\sqrt{\cos x}}=0$
Вариант 9 1. Решите уравнение $\log_{\sin x}\left(\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin 2x-2\sin^2 x\right)=2$ 2. Решите уравнение $\left(\sqrt{-\sin x}-1\right)\left(tg^2 x-tgx-2\right)=0$	Вариант 10 1. Решите уравнение $\log_{\cos x}(\cos 2x-\sin x)=0$ 2. Решите уравнение $\frac{3\cos 2x+7\cos x+3}{\sqrt{-\sin x}}=0$

Ответы:

Вариант 1. 1. -2,5;

2. $\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi k;n,k\in Z$

Вариант 2. 1. -1,5;

2. $\frac{\pi}{2}+\pi n;-\frac{5\pi}{6}+2\pi k;n,k\in Z$

Вариант 3. 1. 0,2; 2. $\frac{\pi}{3}+2\pi n;n\in Z$

Вариант 4. 1. 0,5; 2. $\frac{2\pi}{3}+2\pi n;n\in Z$

Вариант 5. 1. 3; 2. $-\frac{\pi}{3}+\pi n,n\in Z$

Вариант 6. 1. 2; 2. $\frac{5\pi}{6}+2\pi n;$

$\frac{\pi}{2}+\pi k,n,k\in Z$

Вариант 7. 1. 0;

2. $\frac{5\pi}{6}+2\pi n;-\frac{\pi}{4}+\pi k,n,k\in Z$

Вариант 8. 1. 6; 2. $\frac{\pi}{6}+2\pi n;$

$\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,n,k\in Z$

Вариант 9. 1. $\frac{\pi}{6}+2\pi n,n\in Z$;

2. $-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \ \pi+arctg 2+2\pi k,n,k\in Z$;

Вариант 10. 1. $-\frac{\pi}{6}+2\pi n,n\in Z$;

2. $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,k\in Z$

Домашнее задание

1. Найдите сумму корней уравнения $\left(3^{2x^2-29}-27\right)\sqrt[4]{5x+18}=0$. Ответ: 0,4.

2. Решите уравнение $4^{\left(\sqrt{2}-\sin 18\pi x\right)\left(\sqrt{2}+\sin 18\pi x\right)}=16+(2x+1)^2$. Ответ: $-0{,}5$.

3. Решите уравнение $\frac{3\cos 2x+5\cos x-1}{\sqrt{-ctgx}}=0$. Ответ: $-\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$.

4. Вычислите $\log_2 \sin\frac{\pi}{12}+\log_2 \sin\frac{\pi}{6}+\log_2 \sin\frac{5\pi}{12}$. Ответ: -3.

5. Решите уравнение $\log_3\left(9-(4x-2)^2\right)=3+\cos 6\pi x$. Ответ: 0,5.

6. Решите уравнение $\log_{\sin x}\left(2\sin 2x+5\sin^2 x\right)=2$. Ответ: $\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$.

Занятие 5. Логарифмическая функция при решении комбинированных уравнений

Устно (проверка домашнего задания, если необходимо)

1. Найдите значение выражения $\log_{20}5+\log_{20}4+2$; $0{,}3^{\log_{0,3}2}-5$; $-4\log_6\left(6^3\right)$; $4\cdot 3^{\log_3 5}$;

2. Решите уравнение $\log_2(x+8)=\log_2 3+\log_2 5$; $\log_5(3x)-\log_5 4=\log_5 8$;

$7\cdot 5^{\log_5 x}=x+21$

3. Вычислите $5^{\log_4 0{,}25+\log_5 7}$.

4. Четыре ученика независимо друг от друга решали уравнение $\log_{\sin x}\left(\sin 2x+2\sqrt{3}\sin^2 x+1\right)=0$, заменяя его на равносильную (по их мнению) систему, совокупность или равносильное уравнение. Укажите верный результат.

1) $\cos x+2\sqrt{3}\sin x=0$ 2) $\begin{cases}\sin 2x+2\sqrt{3}\sin^2 x=\sin x-1,\\ |\sin x|<1\end{cases}$

3) $\begin{cases}ctgx=-\sqrt{3},\\ \cos x<0\end{cases}$ 4) $\left[\begin{array}{l}2\sin x\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x\right)=0,\\ 0<\sin x<1\end{array}\right.$

Ответ: 3.

5. При подготовке к ЕГЭ четыре ученика независимо друг от друга решали уравнение $\log_2^2 x+\log_2 x-1=\left(\sqrt{5-x^2}\right)^2+x^2$, заменяя его на равносильную (по их мнению) систему, совокупность или равносильное уравнение. Укажите верный результат.

1) $\log_2^2 x+\log_2 x-6=0$ 2) $\begin{cases}\log_2 x^3=6,\\ x>0\end{cases}$

3) $\left[\begin{array}{l} 0<x<\sqrt{5}, \\ \begin{cases} \log_2 x=-3, \\ \log_2 x=2, \end{cases} \end{array}\right.$ 4) $\begin{cases} x^2 \le 5, \\ \left[\begin{array}{l} \log_2 x=-3, \\ \log_2 x=2 \end{array}\right. \end{cases}$

Ответ: 4.

6. Оцените решение ученика от 0 до 2 баллов.

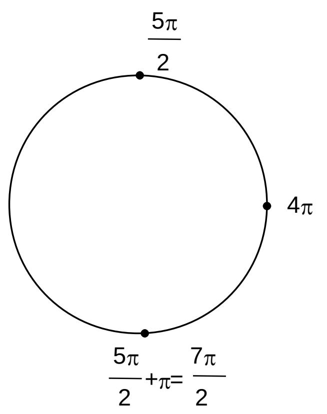
Решите уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)=\cos x$ $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$

Решение.

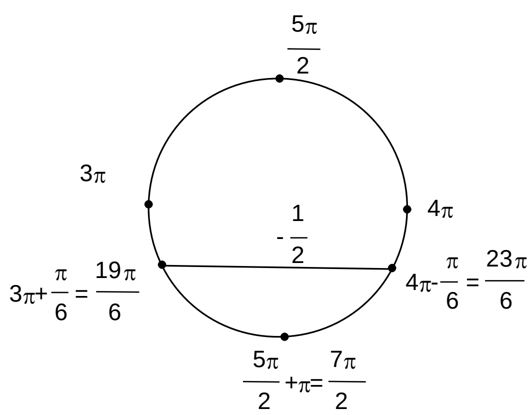
$-\sin 2x=\cos x$; $-2\sin x\cos x=\cos x$; $\cos x+2\sin x\cos x=0$; $\cos x(1+2\sin x)=0$

$\cos x=0$ или $\sin x=-\frac{1}{2}$; $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$ $x=(-1)^k\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi k$; $x=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi k$;

$x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$



$x=\frac{5\pi}{2}; x=\frac{7\pi}{2}$



$x=\frac{19\pi}{6}; x=\frac{23\pi}{6}$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi n, (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k, n,k\in Z$; $\frac{5\pi}{2};\frac{7\pi}{2};\frac{19\pi}{6};\frac{23\pi}{6}$.

Оценка эксперта: 0 баллов

Карточки

1. Решите уравнение $\log_6^2 x + \log_6 x + 14 = \left(\sqrt{16 - x^2}\right)^2 + x^2$. Ответ: $\frac{1}{36}$.

2. Решите уравнение $\sqrt{x^2(x+5)+6x} \cdot \lg(-2-x) = 0$. Ответ: -3.

3. Решите уравнение $\log_2(x+1)^4 = 6 + \log_2|x+1|$. Ответ: 3 и -5.

4. Найти сумму квадратов всех корней уравнения $\left|\lg|x|\right| = 1$. Ответ: 200,02.

5. Найти произведение всех корней уравнения $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5\log_3|x| + 6 = 0$. Ответ: 243.

Работа в тетради

1. Решите уравнение $x^2 - 26x + 120 = (26 - \log_2 x - 2x) \cdot \log_2 x$

Решение.

$x^2 - 26x + 120 = 26\log_2 x - \log_2^2 x - 2x\log_2 x$; $x^2 + 2x\log_2 x + \log_2^2 x - 26x - 26\log_2 x + 120 = 0$;

$(x + \log_2 x)^2 - 26(x + \log_2 x) + 120 = 0$

Пусть $x + \log_2 x = t$; $t^2 - 26t + 120 = 0$; $t = 20, t = 6$.

$\log_2 x = 20 - x$ или $\log_2 x = 6 - x$

$x = 16$ $\qquad\qquad$ $x = 4$

Функция $y = \log_2 x$ возрастающая, а функции $y = 20 - x$ и $y = 6 - x$ убывающие, значит, если у уравнения есть корень, то он единственный.

Ответ: 16; 4.

2. Решите уравнение $\dfrac{\lg(9x - x^2 - 13) \cdot \lg(13 - 2x)}{x - 2} = 0$

Решение.

$$\begin{cases} \lg(9x - x^2 - 13) = 0, \\ 13 - 2x > 0, \\ x \neq 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \lg(13 - 2x) = 0, \\ 9x - x^2 - 13 > 0, \\ x \neq 2 \end{cases}$$

1. $\begin{cases} 9x - x^2 - 13 = 1, \\ x < 6{,}5, \\ x \neq 2 \end{cases}$ нет решений

2. $\begin{cases} x=6, \\ x^2-9x+13<0, \quad x=6 \\ x\neq 2 \end{cases}$

Ответ: 6

3. Решите уравнение $\log_{\sin x}\left(\sqrt{3}\sin 2x+2\sin^2 x+1\right)=0$

Решение.

$$\begin{cases} \sqrt{3}\sin 2x+2\sin^2 x+1=1, \\ \sin x>0, \\ \sin x\neq 1 \end{cases}$$

1. $2\sin x\left(\sqrt{3}\cos x+\sin x\right)=0$

$\sin x=0$ или $tgx=-\sqrt{3}$ $\quad x=-\dfrac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$

не удовлетворяет условию

$\sin x>0$

2. $\begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z \\ \sin x>0 \end{cases}$ $\quad x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$. Ответ: $\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$.

4. Решите уравнение $\log_4\left(4\sin^2 2x\right)=2-\log_2(-2tgx)$

Решение.

$\log_2|2\sin 2x|+\log_2(-2tgx)=2$; $\log_2(-2\cdot 2\sin x\cos x)+\log_2\left(-2\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)=2$

$\begin{cases} \log_2\left(8\sin^2 x\right)=\log_2 4 \\ tgx<0 \end{cases}$ $\begin{cases} \sin x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ tgx<0 \end{cases}$ $\quad x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$. Ответ: $-\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$.

5. Решите уравнение $\log_{(\cos 2x-\sin 2x)}(1-\cos x-\sin x)=1$

Решение.

$$\begin{cases} \cos 2x-\sin 2x>0, \\ \cos 2x-\sin 2x\neq 1, \\ \cos 2x-\sin 2x=1-\cos x-\sin x \end{cases}$$

1. $(1-\cos 2x)+\sin 2x-\cos x-\sin x=0$; $2\sin^2 x+2\sin x\cos x-(\sin x+\cos x)=0$

$$2\sin x(\sin x+\cos x)-(\sin x+\cos x)=0;\ \left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{2}\\ tgx=-1\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,k\in Z\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k\end{array}\right.$$

2. Если $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,$ то $\cos 2x-\sin 2x=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$, поэтому $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$ не удовлетворяет условию задачи

3. Если $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k,$ то $\cos 2x-\sin 2x=\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}>0,\neq 1$, поэтому $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$ удовлетворяет условию задачи

4. Если $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, то $\cos 2x-\sin 2x=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0-(-1)=1,$ поэтому $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$ не удовлетворяет условию задачи

Ответ: $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k,k\in Z$.

6. Решите уравнение $2|\sin x|+\log_{tgx}\left(-\frac{|\cos x|}{\sin x}\right)=0$

Решение.

1. $\begin{cases} tgx>0,\\ tgx\neq 1,\\ -\dfrac{|\cos x|}{\sin x}>0\end{cases}$ $\begin{cases} tgx>0,\\ tgx\neq 1\\ \sin x<0\end{cases}$ $\begin{cases}\cos x<0,\\ \sin x<0,\\ tgx\neq 1\end{cases}$

2. $-2\sin x+\log_{tgx}ctgx=0$; $-2\sin x-1=0$; $\sin x=-\frac{1}{2}$ $\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k\\ x=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k\end{array}\right.$, где $k\in Z$

Так как $\cos x<0$, $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,k\in Z$. Ответ: $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,k\in Z$.

7. Решите уравнение $\log_{\sin(-x)}\left(\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{3}{2}x\right)=1$

Решение.

$$\begin{cases} \sin(-x) > 0, \\ \sin(-x) \neq 1, \\ \sin(-x) = \sin\dfrac{x}{2} + \sin\dfrac{3x}{2} \end{cases} \begin{cases} \sin x < 0, \\ \sin x \neq -1, \\ \sin x + 2\sin x \cos\dfrac{x}{2} = 0 \end{cases} \begin{cases} \sin x < 0, \\ \sin x \neq -1, \\ \cos\dfrac{x}{2} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} \sin x < 0, \\ \sin x \neq -1, \\ x = \pm\dfrac{4\pi}{3} + 4\pi k, k \in Z \end{cases}$$

$x = \dfrac{4\pi}{3} + 4\pi k, k \in Z$. Ответ: $\dfrac{4\pi}{3} + 4\pi k, k \in Z$.

Самостоятельная работа № 5

Вариант 1 1. Найдите сумму всех корней уравнения $\lg(x^2 - 10x + 25) \cdot \log_3(3x-5) \cdot \log_{12}(x-2)^2 = 0$ 2. Решите уравнение $\dfrac{2\cos^2 x + \sin x - 2}{\log_6(\cos x)} = 0$	Вариант 2 1. Решите уравнение $(9 - 3^{0,5x-7})\log_2(5-2x) = 0$ 2. Решите уравнение $(2\sin^2 x - \cos x - 2)\log_{\sin x} x^2 = 0$
Вариант 3 1. Решите уравнение $\left(\dfrac{1}{27} - 3^{6-x^2}\right)\log_2(4+5x) = 0$ 2. Решите уравнение $\dfrac{\sin 2x - \sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\sin x - 1}{\lg(tgx + 2)} = 0$	Вариант 4 1. Найдите наименьший корень уравнения $\log_3(x+1)^2 + \log_3\lvert x+1\rvert = 6$ 2. Решите уравнение $\dfrac{6\cos^2 x - 5\sqrt{2}\cos x + 2}{\lg tgx} = 0$
Вариант 5 1. Найдите сумму всех корней уравнения $(x + 4\sqrt{4-x} - 7)\lg(x+7) = 0$ 2. Решите уравнение $(2\sin^2 x - \cos x - 2)\log_{\sin x} x^2 = 0$	Вариант 6 1. Решите уравнение $3^{\log_3(1+x)} + 20 = 3x + x^{\log_x 5}$ 2. Решите уравнение $\log_4(4ctg^2 x) - \log_2(-2\sin 2x) = 1$
Вариант 7 1. Решите уравнение $\sin^2(\pi x) + \log_3^2(2x^3 + 5x^2 - 3x + 1) = 0$	Вариант 8 1. Найдите сумму всех корней уравнения $\lg(x^2 - 16x + 64) \cdot \log_3(2x-9) \cdot \log_{12}(x-5)^2 = 0$

2. Решите уравнение $\log_{\cos x}\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)-2\sin^2 x+5\sin 2x=0$	2. Решите уравнение $\log_{\cos x}\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=2\sin^2 x+3\sin 2x$
В а р и а н т 9 1. Решите уравнение $\frac{\lg\left(7x-x^2-5\right)\cdot\lg(11-2x)}{x-1}=0$ 2. Решите уравнение $\log_{\sin x}\left(3\sin 2x+2\sin^2 x\right)=2$	В а р и а н т 10 1. Найдите произведение всех корней уравнения $\log_{0,5}^2 x-7\log_2\lvert x\rvert+12=0$ 2. Решите уравнение $\log_{\sin x}\left(\sin 2x+7\sin^2 x\right)=2$

Ответы:

Вариант 1. 1. 13; 2. $\frac{\pi}{6}+2\pi n; n\in Z$

Вариант 2. 1. 2; 2. $1; \frac{2\pi}{3}+2\pi n; n\in Z$

Вариант 3. 1. $-0,6;3$; 2. $\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$

Вариант 4. 1. -10;

2. $\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}+2\pi k; k\in Z$

Вариант 5. 1. -8; 2. $\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z; 1$

Вариант 6. 1. 8; 2. $-\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$

Вариант 7. 1. 0; -3;

2. $arctg 5+2\pi n, n\in Z$

Вариант 8. 1. 22;

2. $-arctg 3+2\pi n, n\in Z$

Вариант 9. 1. 5;

2. $\pi-arctg 6+2\pi n, n\in Z$

Вариант 10. 1. 128;

2. $\pi-arctg\frac{1}{3}+2\pi n, n\in Z$

Домашнее задание

Решите уравнения

1. $\log_{2-x^2}\left(4-x^4\right)=\frac{1}{\log_5\left(2-x^2\right)}+4\log_{25}5$. Ответ: $\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

2. $\frac{81^{\cos x}-12\cdot 9^{\cos x}+27}{\log_7(1+2\sin x)}=0$. Ответ: $\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$.

3. $\sqrt{4\log_2 x+17}=3\log_8 x+3$. Ответ: 4.

4. $\log_3((x+10)\cos x)=\log_3\left(\frac{x+10}{\cos x}\right)$. Ответ: $2\pi k; \pi+2\pi n, k,n\in Z, k\ge -1, n\le -3$.

5. $\left(2\sqrt{3}\sin(\pi x+3\pi)-tg\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)\right)\log_2\left(4-x^2\right)=0$. Ответ: $\pm\sqrt{3};\pm\frac{1}{6};\pm\frac{11}{6}$.

Решение 4 и 5 номера домашнего задания.

4. Решение.

$$\begin{cases} (x+10)\cos x > 0, \\ (x+10)\cos x = \dfrac{x+10}{\cos x} \end{cases} \quad \begin{cases} (x+10)\cos x > 0, \\ \cos^2 x = 1 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x = 1 \\ x+10>0 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x = -1 \\ x+10<0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2\pi k \\ x > -10 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pi + 2\pi n \\ x < -10; k, n \in Z \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2\pi k \\ k = -1,0,1,2,... \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pi + 2\pi n \\ n = -3,-4,-5,... \end{cases} \end{array}\right.$$ Ответ: $2\pi k; \pi + 2\pi n, k, n \in Z, k \geq -1, n \leq -3$.

5. Решение.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_2\left(4-x^2\right) = 0, \\ \cos\left(\pi x - \dfrac{\pi}{2}\right) \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4-x^2 > 0, \\ 2\sqrt{3}\sin(\pi x + 3\pi) - tg\left(\pi x - \dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4-x^2 = 1 \\ \pi x - \dfrac{\pi}{2} \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \end{cases} \\ \begin{cases} -2 < x < 2 \\ -2\sqrt{3}\sin(\pi x) + ctg(\pi x) = 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ x \neq 1 + n, n \in Z \end{cases} \\ \begin{cases} -2 < x < 2 \\ \dfrac{\cos(\pi x) - 2\sqrt{3}\sin^2(\pi x)}{\sin(\pi x)} = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{3} \\ \begin{cases} -2 < x < 2 \\ \dfrac{2\sqrt{3}\cos^2(\pi x) + \cos(\pi x) - 2\sqrt{3}}{\sin(\pi x)} = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{3} \\ \begin{cases} -2 < x < 2 \\ \sin(\pi x) \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \cos(\pi x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(\pi x) = -\dfrac{2}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{3} \\ \begin{cases} -2 < x < 2 \\ \cos(\pi x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{3} \\ \begin{cases} -2 < x < 2 \\ (\pi x) = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{3} \\ \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x = \pm\dfrac{1}{6} + 2k, k \in Z \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{3} \\ x = \pm\dfrac{1}{6} \\ x = \pm\dfrac{11}{6} \end{array}\right.$$. Ответ: $\pm\sqrt{3}; \pm\dfrac{1}{6}; \pm\dfrac{11}{6}$.

Занятие 6. Отбор корней тригонометрического уравнения на отрезке

Устно

1. Оцените решение ученика от 0 до 2 баллов

Решите уравнение $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)=\sin x$. Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$

Решение.

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)=\sin x$; $-\cos 2x=\sin x$; $2\sin^2 x-1=\sin x$; $2\sin^2 x-\sin x-1=0$; $\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$

1. $x=\frac{5\pi}{2}+2\pi n$; 2. $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$; 3. $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi m$

Ответ: $\frac{5\pi}{2}+2\pi n; -\frac{\pi}{6}+2\pi k; -\frac{5\pi}{6}+2\pi m, n,k,m\in Z$; $\frac{5\pi}{2};\frac{7\pi}{6};\frac{3\pi}{2}$.

Оценка эксперта: 1 балл

2. Решите устно $\frac{x^2-5}{x+1}=1$; $|x-5|=3$; $x^2+2x-3\le 0$; $\frac{x^3+x}{x-1}>0$; $\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+5}$;

$\sqrt{x}<3$; $4^x=\frac{1}{8}$; $2^{\log_4 x}=3$

3. Вычислите $\dfrac{3+4{,}2:0{,}1}{\left(1:0{,}3-2\frac{1}{3}\right)\cdot 0{,}3125}$. Ответ: 144.

4. Решите уравнение $(2\sin x+1)(2\cos x-3)=0$; $\frac{(7x-8\pi)(8x-7\pi)}{\sqrt{\sin x}}=0$; $\frac{4\cos x-3}{\sqrt{tgx}}=0$

Карточки

1. Решите уравнение $\left(2\cos^2 x+\sin x-2\right)\ln\sin x=0$; $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z; \frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$

2. Решите уравнение $\left(2\sin^2 x-\cos x-2\right)\ln(-\cos x)=0$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z; \pi+2\pi k, k\in Z$

3. Решите уравнение $2\cos^2 x + 2\sin 2x = 3$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right]$; $\frac{\pi}{4}+\pi n; arctg\frac{1}{3}+\pi k; n,k \in Z$; $-\frac{3\pi}{4}$; $-\pi - arctg\frac{1}{3}$.

4. Решите уравнение $\frac{2}{tg^2 x+1} = \sin 2x$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$. $\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi k; n,k \in Z; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; -\frac{3\pi}{4}; -\frac{7\pi}{4}$.

Работа в тетради

1. Решите уравнение $2\sin^2 x + \sin 2x = 2$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

Сводим к однородному уравнению: $\sin x \cos x = \cos^2 x$; $\cos x = 0$ или $tgx = 1$

$x = \frac{\pi}{2}+\pi n$ $x = \frac{\pi}{4}+\pi k$, $n,k \in Z$. Отберем корни на отрезке: $\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{9\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi k; n,k \in Z; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{9\pi}{4}$.

2. Решите уравнение $2\cos 2x + 8\cos x + 5 = 0$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

Сводим к квадратному уравнению: $4\cos^2 x + 8\cos x + 3 = 0$. Тогда $\cos x = -\frac{1}{2}$

и $x = \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n \in Z$. Отбирая корни на единичной окружности, получим:

$-\frac{2\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}$.

Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n \in Z$; $-\frac{2\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}$.

3. Решите уравнение $5\cos 2x + 7\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -1$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{11\pi}{2}\right]$.

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$; $\frac{25\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}; \frac{29\pi}{6}$.

4. Решите уравнение $2\sin 2x - 4\cos x - \sin x + 1 = 0$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z; \pm \arccos\frac{1}{4} + 2\pi k, k \in Z; \frac{\pi}{2}$.

5. Решите уравнение $\sin x = \cos 7x$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z; -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z.$ $-\frac{3\pi}{16}; \frac{\pi}{16}; \frac{5\pi}{16}; -\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{4}$.

6. Решите уравнение $\sqrt{3}\sin x - tgx + tgx\sin x = \sqrt{3}$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z; -\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$.

7. Решите уравнение $6\sin^2 x + \cos x - 5 = 0$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[2\pi; 3\pi]$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z; \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{3}\right) + 2\pi m, m \in Z; \frac{7\pi}{3}; 3\pi - \arccos\frac{1}{3}$.

8. Решите уравнение $\sin x + \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) = 0$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z; \frac{7\pi}{4}$.

Самостоятельная работа № 6

Вариант 1	Вариант 2
1. Решите уравнение $\sqrt{3}tg\left(\pi x-\frac{\pi}{5}\right)=1$ Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $-2<x<1$ 2. Решите уравнение $7\sin^2 x+4\sin x\cos x-3\cos^2 x=0$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$	1. Решите уравнение $\sqrt{3}tgx+3=0$ Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right]$ 2. Решите уравнение $\cos 2x+2\cos^2 x-\sin 2x=0$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$
Вариант 3	**Вариант 4**
1. Решите уравнение $\cos x=-0{,}5$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ 2. Решите уравнение $\cos x=\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2-1$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$	1. Решите уравнение $\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-2\pi;\pi)$ 2. Решите уравнение $\sin 2x=2\sin x-\cos x+1$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$
Вариант 5	**Вариант 6**
1. Найдите наименьший положительный корень уравнения, ответ дайте в градусах: $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения; ответ дайте в градусах: $\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Решите уравнение $6\cos^2 x-7\cos x-5=0$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-\pi;2\pi]$	2. Решите уравнение $\cos 2x=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right)$
В а р и а н т 7 1. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения, ответ запишите в градусах $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$ 2. Решите уравнение $4\cos x\sin x-3\sin^2 x=1$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{4}\right]$	В а р и а н т 8 1. Найдите наибольший корень уравнения $\cos 2x+3\sin x=2$, принадлежащий отрезку $[-3\pi;-\pi]$; ответ дайте в градусах. 2. Решите уравнение $4\sin^3 x=3\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$. Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2};\frac{9\pi}{2}\right]$
В а р и а н т 9 1. Найдите число корней уравнения $\sin^2 2x=0{,}75$ при $x\in\left(0^0;45^0\right)$ 2. Решите уравнение $4\cos^3 x+\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=0$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[\pi;2\pi]$.	В а р и а н т 10 1. Решите уравнение $5\sin^2 2x+8\cos^3 x=8\cos x$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ 2. Решите уравнение $2\sin^3 x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right]$

Ответы:

Вариант 1. 1. $\frac{11}{30}+n, n\in Z; -\frac{49}{30}; -\frac{19}{30}; \frac{11}{30}$;

2. $\frac{\pi}{4}+\pi n; n\in Z; -arctg3+\pi k, k\in Z; \frac{9\pi}{4}; -arctg3+2\pi$;

Вариант 2. 1. $-\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z; \frac{2\pi}{3}$; 2. $\frac{\pi}{4}+\pi n; n\in Z; -arctg3+\pi k, k\in Z; \frac{9\pi}{4}; -arctg3+2\pi$

Вариант 3. 1. $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}$; 2. $-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z; \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}$

Вариант 4. 1. $\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}\pi n, n\in Z; \frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi k, k\in Z; -\frac{17\pi}{9}; -\frac{11\pi}{9}; -\frac{5\pi}{9}; \frac{\pi}{9}; \frac{7\pi}{9}; -\frac{5\pi}{3}; -\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}$.
2. $2\pi k; -\frac{\pi}{6}+2\pi n; -\frac{5\pi}{6}+2\pi m; k,n,m\in Z; -2\pi; -\frac{5\pi}{6}$.

Вариант 5. 1. 270; 2. $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}$.

Вариант 6. 1. -60; 2. $\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z; \frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z; \pi m, m\in Z$; $-2\pi; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}$

Вариант 7. 1.-90; 2. $arctg\frac{1}{2}+\pi n, n\in Z; -\pi+arctg\frac{1}{2}; arctg\frac{1}{2}; \pi+arctg\frac{1}{2}$.

Вариант 8. 1. -210; 2. $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z; \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z; \pi m, m\in Z; 4\pi; \frac{13\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}$.

Вариант 9. 1. 1; 2. $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z; \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z; \frac{\pi}{2}+\pi m, m\in Z$; $\frac{3\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$.

Вариант 10. 1. $\frac{\pi}{2}+\pi n; \pi k; \pm\arccos\frac{2}{5}+2\pi m, n,k,m\in Z$; $\frac{3\pi}{2}; 2\pi$; 2. $\pi n, n\in Z; \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$; $-\pi; -\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}; -\pi$.

Домашнее задание

1. Решите уравнение $(\cos x-\sin x)^2-\cos 2x=1$. Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; -\frac{\pi}{4}\right]$. Ответ: $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$; $-\frac{5\pi}{8}$.

2. Решите уравнение $\cos^2 x + 3\sin^2 x = -\sqrt{3}\sin 2x$. Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{3}; \pi\right]$. Ответ: $-\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z; -\frac{7\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}$.

3. Решите уравнение $6\sin^2 x + 5\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2 = 0$. Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$. Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z; -\frac{14\pi}{3}$.

4. Решите уравнение $\cos 2x + \sin^2 x = 0{,}5$. Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$. Ответ: $\pm\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z; -\frac{13\pi}{4}; -\frac{11\pi}{4}; -\frac{9\pi}{4}$.

Занятие 7. Обобщающее повторение

Устно (проверка домашнего задания, если необходимо)

1. Четыре ученика независимо друг от друга решали уравнение $\log_{\sin x}\left(\sin 2x + 7\sin^2 x\right) = 2$, заменяя его на равносильную (по их мнению) систему, совокупность или равносильное уравнение. Укажите верный результат.

1) $\cos x + 3\sin x = 0$

2) $\begin{cases} \sin 2x + 7\sin^2 x = 2\sin x, \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$

3) $\left[\begin{array}{l} \sin x(2\cos x + 7\sin x) = 0, \\ 0 < \sin x < 1 \end{array}\right.$

4) $\begin{cases} tgx = -\frac{1}{3}, \\ \sin x > 0 \end{cases}$

Ответ: 4.

2. Четыре ученика независимо друг от друга решали задачу С1 из ЕГЭ: «Решите уравнение $1 - \sin 2x \cdot tgx = \sin x$». Каждый из них получил уравнение (совокупность, систему), которое на его взгляд равносильно этому уравнению. Укажите верный результат.

1) $\begin{cases} \sin^2 x + \sin x - 1 = 0, \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$

2) $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$

3) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$ 4) $\left[\begin{array}{l}\sin x=-1,\\ 2\sin x=1\end{array}\right.$

Ответ: 2.

3. Решите уравнение

1. $\frac{3}{11}x=3\frac{3}{11}$; $\frac{2}{x}=-1$	2. $\frac{16}{x^2-9}=1$; $(2x-3)^2=(2x+5)^2$
3. $\sqrt{20-3x}=\sqrt{5}$; $\sqrt{\frac{1}{3-2x}}=0{,}5$	4. $2^x\cdot 3^x=6$; $5^x\cdot 2^{-x}=0{,}4$; $13^{11-x}=7^{11-x}$
5. $\log_{\frac{1}{7}}(6-x)=-2$; $\log_7(3-x)=2\log_7 4$	6. Найдите наибольший отрицательный корень $\sin\pi x=0$
7. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\cos\pi x=1$	8. Найдите значение выражения $5\sin(\pi+\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$, если $\sin\alpha=0{,}5$

Карточки

1. $\frac{16^{\sin x}-6\cdot 4^{\sin x}+8}{\log_2(1-2\cos x)}=0$. Ответ: $\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$.

2. $\frac{10\sin^2 x-3\sin x-4}{\sqrt{tgx}}=0$. Ответ: $\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z; \pi+\arcsin\frac{1}{5}+2\pi k, k\in Z$.

3. $(\cos x-1)(tgx+\sqrt{3})\sqrt{\cos x}=0$. Ответ: $2\pi n; -\frac{\pi}{3}+2\pi k, n,k\in Z$.

4. $(\sin 2x-\sin x)(\sqrt{2}+\sqrt{-2ctgx})=0$. Ответ: $-\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$.

5. $\cos 2x+0{,}75=\cos^2 x$. Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$. Ответ: $\frac{\pi}{3}+\pi k, \frac{2\pi}{3}+\pi k, k\in Z. -\frac{11\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}; -\frac{8\pi}{3}$.

Работа в тетради

1. Решите уравнение $\sqrt{\sin x\cdot\sin 3x}=\cos x$

Решение.

$\left\{\begin{array}{l}\cos x\geq 0,\\ \sin 3x\sin x=\cos^2 x\end{array}\right.$; $\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 4x)=\cos^2 x$; $\cos 2x-\cos 4x=2\cos^2 x$;

$\cos 2x - \cos 4x = 1 + \cos 2x$; $\cos 4x = -1$; $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$ $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi\ k, k \in Z$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$.

2. Решите уравнение $\log_2\left(3|\sin x| - |\cos x|\right) + \log_2|\cos x| = 0$

Решение.

$\begin{cases} \log_2\left(\left(3|\sin x| - |\cos x|\right)\cdot|\cos x|\right) = 0, \\ |\cos x| > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 3|\sin x||\cos x| - |\cos x|^2 = 1 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$ Так как $1 = |\cos x|^2 + |\sin x|^2$,

то $|tgx|^2 - 3|tgx| + 2 = 0$. $|tgx| = 1$ или $|tgx| = 2$; $\left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n \\ x = \pm arctg\, 2 + \pi k, n, k \in Z \end{array}\right.$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{4} + \pi k, \pm arctg\, 2 + \pi n, n, k \in Z$.

3. Найдите все решения уравнения $\dfrac{\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)}{\sin 3x} = 1$, удовлетворяющие условию $\sin x < 0$

Решение.

$\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin 3x$, $\sin 3x \neq 0$; $\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) - \sin 3x = 0$;

$2\sin\dfrac{x - \frac{2\pi}{3} - 3x}{2}\cos\dfrac{x - \frac{2\pi}{3} + 3x}{2} = 0$; $\sin\left(-x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ или $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$ или $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z$

$$\begin{cases} x \neq \frac{\pi l}{3}, l \in Z \\ \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + \pi n \qquad x = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, n, k \in Z \end{array}\right. \end{cases}$$

Условию $\sin x < 0$ удовлетворяют $x = -\frac{\pi}{12} + 2\pi n, n \in Z$ и $x = -\frac{7\pi}{12} + 2\pi k, k \in Z$.

Ответ: $-\frac{\pi}{12} + 2\pi n, n \in Z; -\frac{7\pi}{12} + 2\pi k, k \in Z.$

4. Решите уравнение $\sqrt{1 + \sin x} + \cos x = 0$

Решение.

$$\begin{cases} -\cos x \ge 0, \\ 1+\sin x = \cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \le 0, \\ 1+\sin x = 1-\sin^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \le 0, \\ \sin^2 x + \sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \le 0, \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = -1 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x \le 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = \pi k \\ x = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right. \end{cases} \left[\begin{array}{l} x = \pi + 2\pi k \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n, k \in Z \end{array}\right.$$. Ответ: $\pi + 2\pi n; -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; n, k \in Z$.

5. Решите уравнение $\cos 7x = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 + x^2$

Решение.

$$\begin{cases} \cos 7x = 1 - x^2 + x^2, \\ 1 - x^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 7x = 1 \\ -1 \le x \le 1 \end{cases} \quad x = \frac{2\pi}{7} n,$$ где $n = 0, \pm 1$ (так как $6 < 2\pi < 7$)

Ответ: 0, $\pm\dfrac{2\pi}{7}$.

6. Найдите все значения x, при каждом из которых выражения

$3x^2 \log_3(2+3x) - 6x \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{2+3x}$ и $3x^2 + 2x$ принимают равные значения.

Решение.

$$3x^2 \log_3(2+3x) - 6x \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{2+3x} = 3x^2 + 2x; 3x^2 \log_3(2+3x) - 6x \cdot \frac{1/3}{-1} \log_3(2+3x) = 3x^2 + 2x$$

$$(3x^2 + 2x)(\log_3(2+3x) - 1) = 0; \ x(3x+2)(\log_3(2+3x) - \log_3 3) = 0, \ 2 + 3x \ne 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2 + 3x = 3 \end{array}\right. \ (2 + 3x > 0); \ x = 0, \frac{1}{3}.$$ Ответ: $0, \dfrac{1}{3}$.

7. Решите уравнение $\log_{\frac{-6x-x^2}{10}}(\sin 3x + \sin x) = \log_{\frac{-6x-x^2}{10}} \sin 2x$.

Решение.

$$\begin{cases} \dfrac{-6x-x^2}{10} > 0 \\ \dfrac{-6x-x^2}{10} \ne 1 \\ \sin 3x + \sin x = \sin 2x \\ \sin 2x > 0 \end{cases} \begin{cases} x^2 + 6x < 0 \\ x^2 + 6x + 10 \ne 0 \\ 2\sin 2x \cos x = \sin 2x \\ \sin 2x > 0 \end{cases} \begin{cases} -6 < x < 0 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \sin 2x > 0 \end{cases} \begin{cases} -6 < x < 0 \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z \\ \sin x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6 < x < 0, \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z \end{cases} \quad x = -\frac{5\pi}{3}.$$ Ответ: $-\frac{5\pi}{3}$.

8. Решите уравнение $\left(\frac{1}{81}\right)^{\cos x} = 9^{2\sin 2x}$. Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -2\pi]$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z; -\frac{17\pi}{6}; -\frac{5\pi}{2}; -\frac{13\pi}{6}$.

Самостоятельная работа

Вариант 1 1. Решите уравнение $\sin 2x \cdot tgx + 1 = 3\sin x$ 2. Решите уравнение $3 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 11 = \left(\sqrt{2 - 2x^2}\right)^2 + 2x^2$	Вариант 2 1. Решите уравнение $\sin^2 \frac{2x}{5} - 10\sin\frac{2x}{5}\sin\frac{x}{5} + 25 = 25\cos^2\frac{x}{5}$ 2. Решите уравнение $4^x - 10 \cdot 2^x + 20 = \left(\sqrt{4 - x^2}\right)^2 + x^2$
Вариант 3 1. Решите уравнение $\frac{\sin 4x}{tg 2x} = \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{tg 2x}$ 2. Решите уравнение $\log_{81}(15 - 7x) \cdot \log_{3-x} 9 = 1$	Вариант 4 1. Решите уравнение $\frac{\sin 2x}{tgx} = \frac{\sqrt{2}\sin^4\frac{x}{2} - \sqrt{2}\cos^4\frac{x}{2}}{tgx}$ 2. Решите уравнение $\sqrt{13 + \frac{4}{\log_x 3}} = 2\log_3\left(3\sqrt{x}\right)$
Вариант 5 1. Решите уравнение $\left(2\sin^2 x - 3\sin x + 1\right)\sqrt{tgx} = 0$ 2. Решите уравнение $\sqrt{\left(3 - 6^x\right)^2} + \sqrt{\left(6 + 6^x\right)\left(11 - 6^x\right)} = 6^x - 3$	Вариант 6 1. Решите уравнение $\sqrt{6\sin x} + 2\cos x = 0$ 2. Решите уравнение $x^2 + 1 = 0{,}5\left(2 + 6x + 4\sqrt{2x^2 - 6x + 5}\right)$
Вариант 7 1. Решите уравнение $\sqrt{\sin x} + \cos x = 0$ 2. Решите уравнение $2 - 3x + x^2 = 2(x - 1)\sqrt{x}$	Вариант 8 1. Решите уравнение $\sqrt{\cos x} = \sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$ 2. Решите уравнение $9^{\log_7\left(9 - 25x^2\right)} = 9^{\log_7(3-5x) + \log_7\left(10x^2 - 6x + 6\right)}$

Вариант 9	Вариант 10
1. Решите уравнение $\sqrt{4-5\sin x}=\sqrt{2}\cos x$ 2. Решите уравнение $4x+14=\frac{11\sqrt{16x^2-2x-5}}{\sqrt{8x-5}}$	1. Решите уравнение $\sqrt{(\sin 3x-2)^2}-\sqrt{9\sin^2 3x-24\sin 3x+16}=-4$ 2. Решите уравнение $5\sqrt{x}\cdot 49^x-30\cdot 49^x=14\sqrt{x}\cdot 7^{x-1}-84\cdot 7^{x-1}$

Ответы:

Вариант 1. 1. $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$; 2. -1

Вариант 2. 1. $5\pi n, n\in Z$; 2. 1

Вариант 3. 1. $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n, n\in Z$; 2. -3

Вариант 4. 1. $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$; 2. 27

Вариант 5. 1. $\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi k; n,k\in Z$; 2. $\log_6 11$

Вариант 6. 1. $\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$; 2. -2,5

Вариант 7. 1. $\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi k, k\in Z$; 2. $1; 4+2\sqrt{3}$

Вариант 8. 1. $(-1)^n\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$; 2. 0,5

Вариант 9. 1. $\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$; 2. $0, \frac{7}{3}$

Вариант 10. 1. $-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}n, n\in Z$; 2. 36

ТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕТРАДЬ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАНИЯ С2

В данном разделе содержится набор тематических задач для отработки каждого элемента содержания (углы и расстояния в пространстве) задания С2 ЕГЭ по математике. Задачи устного счета уровня В, как правило, одношаговые, на непосредственное применение теорем, свойств или формул. Они носят подготовительный характер и направлены на повторение геометрического материала, необходимого для решения более трудных задач. Отметим, что таких задач в учебниках геометрии не очень много, и данное пособие восполняет этот пробел. Задачи для письменного решения в тетради — задачи повышенной трудности уровня С2, решение которых может включать в себя дополнительные построения, составление и решение уравнений с неизвестными величинами. Данная тематическая рабочая тетрадь помогает выработать алгоритмы решения таких задач. Для этого в пособии есть подсказки разной формы. Часто решение сопровождается готовым рисунком, позволяющим лучше понять условие задачи, представить соответствующую геометрическую ситуацию. Также можно следовать уже намеченному плану решения или использовать предложенную формулу для нахождения неизвестного элемента и т. д. В каждой теме присутствуют задачи для домашнего самостоятельного решения и самостоятельная работа на шесть вариантов.

Отметим, что лучшим способом подготовки к ЕГЭ по геометрии являются систематические занятия по учебнику геометрии. Данное пособие не заменяет учебника. Оно может быть использовано в качестве дополнительного сборника задач при изучении геометрии в 10—11 классах, а также при организации обобщающего повторения или самостоятельных занятиях геометрией.

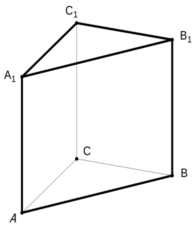
Расстояние от точки до прямой

Определение. Расстоянием от точки до прямой, не проходящей через эту точку, называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую.

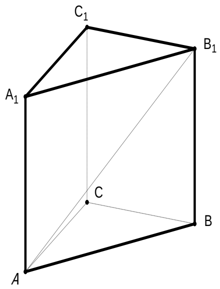
П р и з м ы

Устно

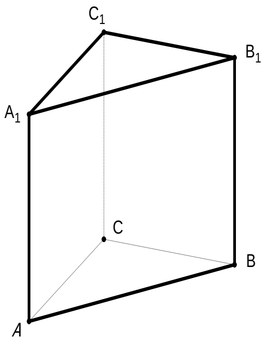
1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой B_1C_1.



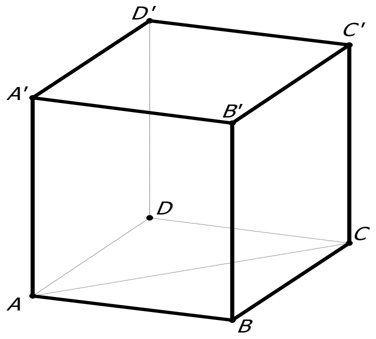
2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние от точки B до прямой AB_1.



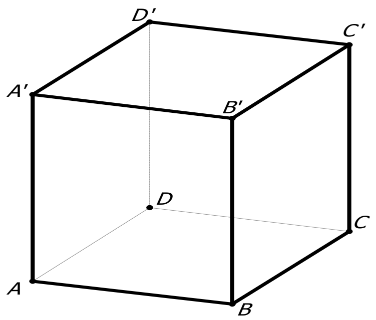
3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны $\sqrt{7}$, найдите расстояние от точки B до прямой A_1C_1.



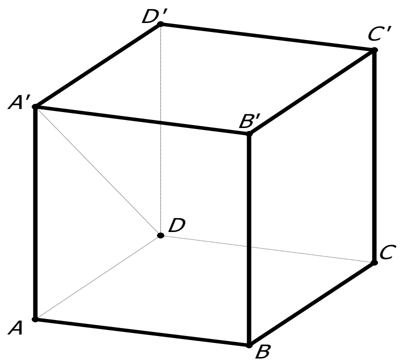
4. В кубе $ABCDA'B'C'D'$, все ребра которого равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние от точки B до прямой AC.



5. В кубе $ABCDA'B'C'D'$, все ребра которого равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние от точки B до прямой $A'D'$.

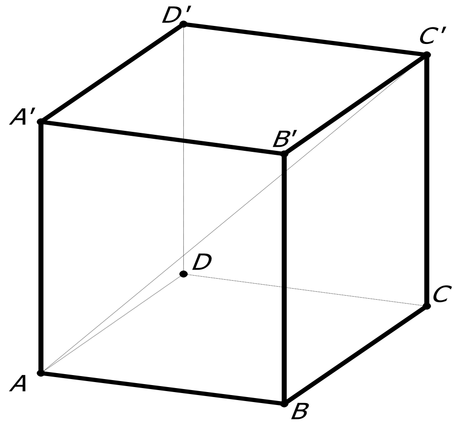


6. В кубе $ABCDA'B'C'D'$, все ребра которого равны $\sqrt{6}$, найдите расстояние от точки B до прямой DA'.

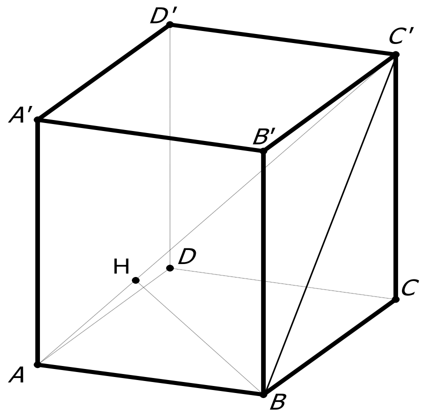


Работа в тетради

1. В кубе $ABCDA'B'C'D'$, все ребра которого равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой AC'.



Решение.



$\Delta ABC'$ — прямоугольный. Объясните, почему?

Проведем $BH \perp AC_1$, BH — искомое расстояние.

$AB = 1, BC' = \sqrt{2}$, тогда по теореме Пифагора $AC' = \sqrt{3}$.

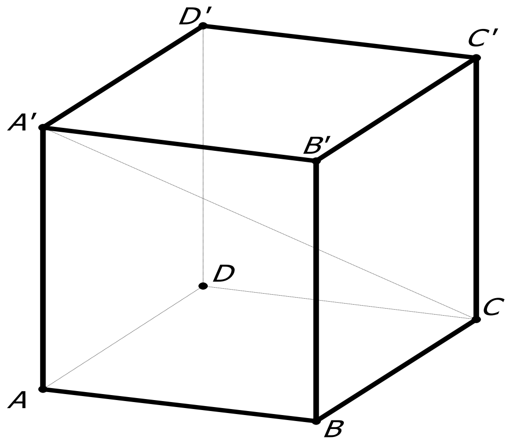
Используя формулы площади треугольника, имеем

$AB \cdot BC' = AC' \cdot BH$.

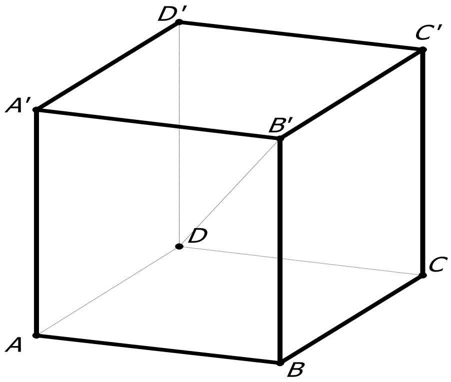
$1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3} \cdot BH \Rightarrow BH = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Объясните, почему в следующих двух задачах ответ такой же $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

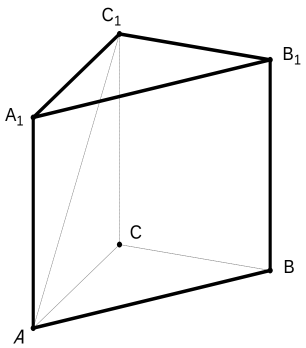
2. В кубе $ABCDA'B'C'D'$, все ребра которого равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой CA'.



3. В кубе $ABCDA'B'C'D'$, все ребра которого равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой DB'.



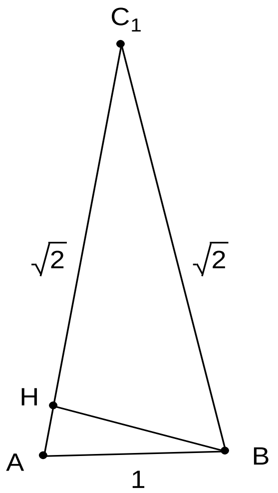
4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой AC_1.

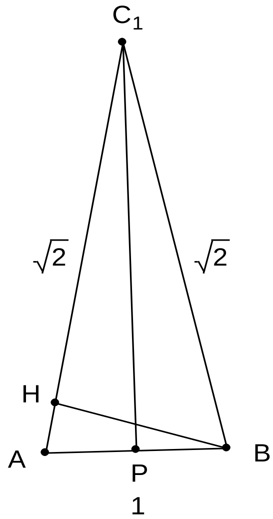


Решение.

ΔABC_1 — равнобедренный. Почему?

Искомое расстояние — это длина перпендикуляра из точки B на боковую сторону AC_1.

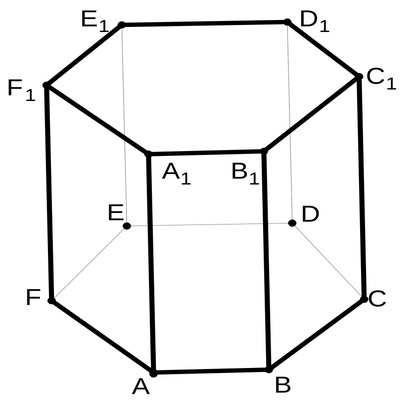




Чтобы найти BH, используем формулу площади треугольника.

$$PC_1 = \sqrt{2-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2};\ 1\cdot\frac{\sqrt{7}}{2} = \sqrt{2}\cdot BH \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

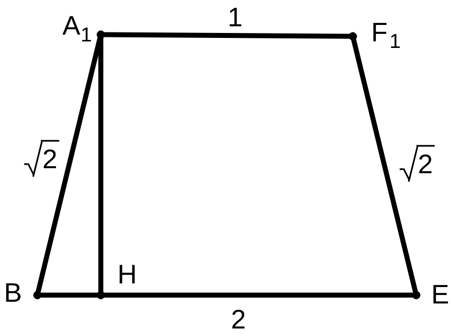
5. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой A_1F_1.



Решение.

Так как $BE \parallel A_1F_1$, то BEA_1F_1 — равнобедренная трапеция.

Искомое расстояние есть высота равнобедренной трапеции, например A_1H.



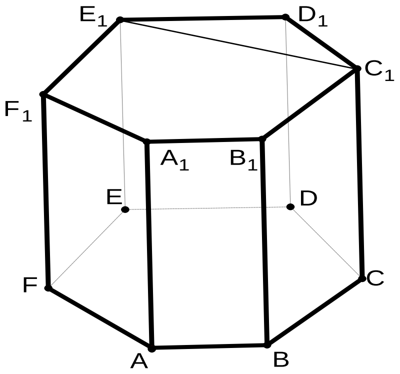
Вам поможет чертеж равнобедренной трапеции $BAFE$.

Тогда, $A_1H = \sqrt{2 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

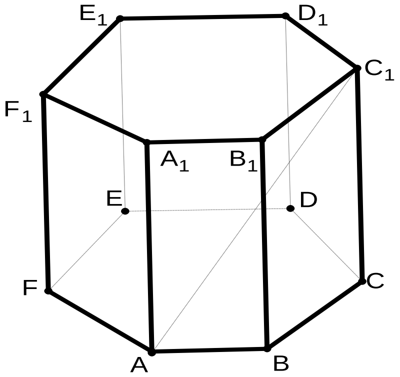
Объясните, почему $BA_1 = \sqrt{2}$ и $BE = 2$?

6. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки *B* до прямой C_1E_1.



Ответ: $\sqrt{2}$. Объясните, почему.

7. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки *B* до прямой AC_1.



Решение.

ΔABC_1 — разносторонний, как найти высоту на сторону AC_1? Проговорите алгоритм решения и вычислите BH.

Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Домашнее задание

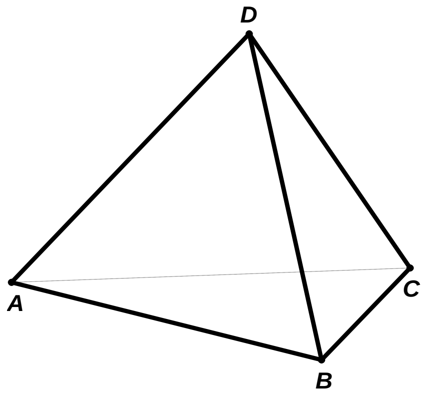
1. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой CD_1. Ответ: $\frac{\sqrt{14}}{4}$.

2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой FC_1. Ответ: $\frac{\sqrt{30}}{5}$.

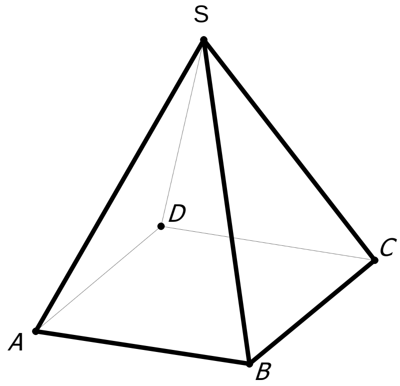
П и р а м и д ы

Устно

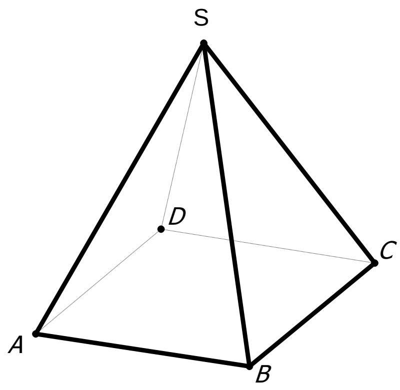
1. В тетраэдре $ABCD$, все ребра которого равны $\sqrt{3}$, найдите расстояние от точки B до прямой CD.



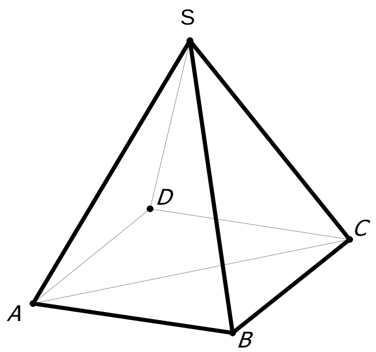
2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны $\sqrt{3}$, найдите расстояние от точки S до прямой BC.



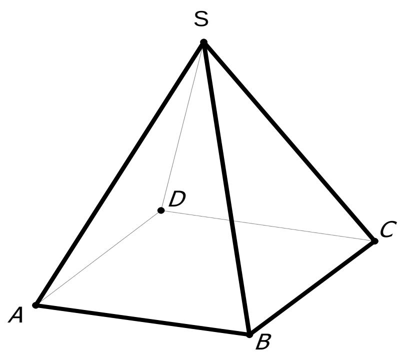
3. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны $\sqrt{3}$, найдите расстояние от точки B до прямой SA.



4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние от точки B до прямой AC.

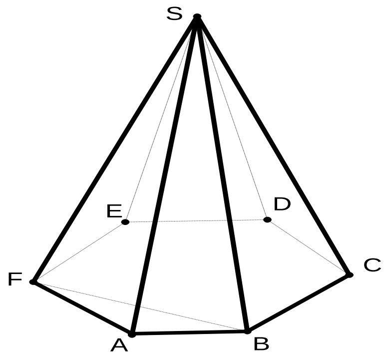


5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой SD.



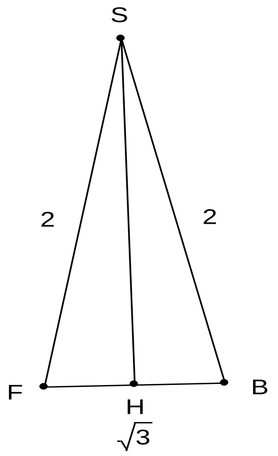
Работа в тетради

1. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки S до прямой BF.



Решение.

Рассмотрим равнобедренный треугольник *FSB*.

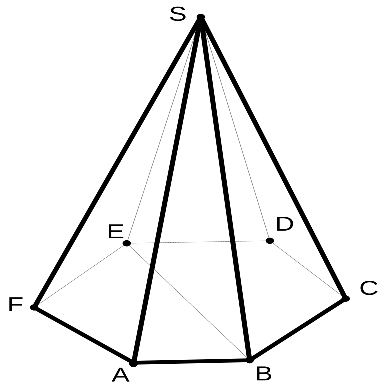


Почему $FB = \sqrt{3}$? Из какого треугольника получается данная длина? На основании какой теоремы?

Тогда $SH = \sqrt{4 - \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

Ответ: $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

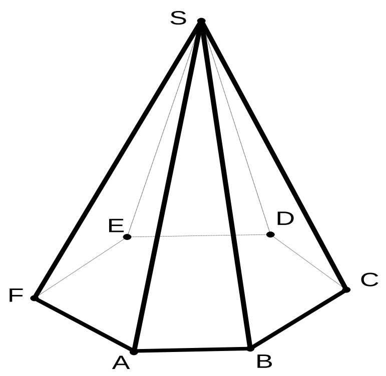
2. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки S до прямой BE .



Решите самостоятельно.

Ответ: $\sqrt{3}$.

3. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки B до прямой SA .



Решение.

Рассмотрим ΔASB.

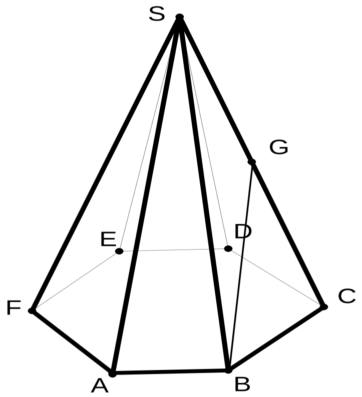
Нужно найти высоту BH,

опущенную на сторону AS.

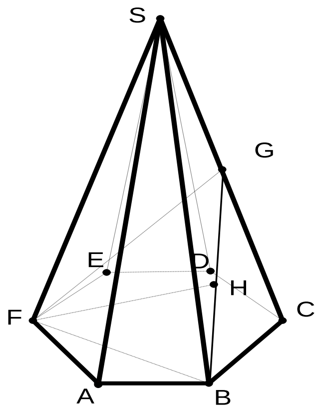
Каким образом?

Проверьте ответ: $\frac{\sqrt{15}}{4}$.

4. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки F до прямой BG, где G — середина ребра SC.



Решение.



Рассматриваем ΔFGB.

Искомое расстояние от точки F

до прямой BG равно высоте FH ΔFBG.

Находим все три стороны этого треугольника.

Объясните, почему $FB = FG = \sqrt{3}$,

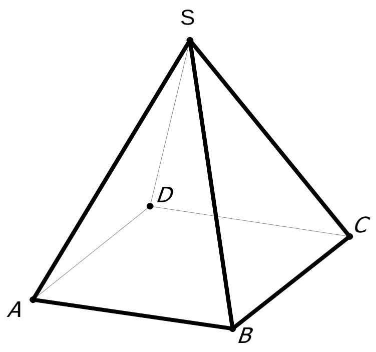
$BG = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Тогда по теореме Пифагора

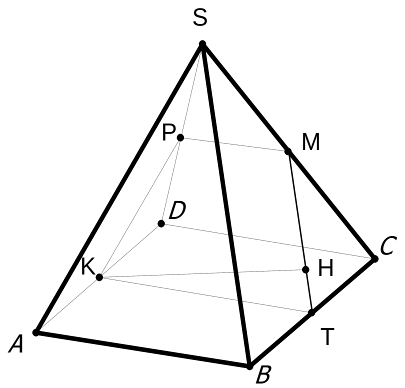
находим $FH = \frac{\sqrt{42}}{4}$

Ответ: $\frac{\sqrt{42}}{4}$.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB=\sqrt{6}$, высота пирамиды $\sqrt{33}$. Найдите расстояние от середины ребра AD до прямой MT, где точки M и T — середины ребер CS и BC соответственно.



Решение.



$KPMT$ — трапеция. Докажите данный факт.

KH — искомое расстояние.

$KT=\sqrt{6}$, $PM=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $SC=6$, $MT=3$.

Объясните, почему?

Используя формулу площади ΔKMT и вычислив высоту трапеции, получаем:

$\sqrt{6}\cdot\dfrac{\sqrt{69}}{\sqrt{8}}=3\cdot KH$.

$KH=\dfrac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{69}}{2\sqrt{2}\cdot 3}$.

$KH=\dfrac{\sqrt{23}}{2}$.

Подготовка к самостоятельной работе

1. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$, стороны основания которой равны 5, а боковые ребра равны 11, найдите расстояние от точки A до прямой E_1D_1. Ответ: 14.

2. Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — ромб $ABCD$, в котором $AB = 10, AC = 6\sqrt{7}$. Боковое ребро $AA_1 = 3\sqrt{21}$. Найдите расстояние от точки B до AC_1. Ответ: 8.

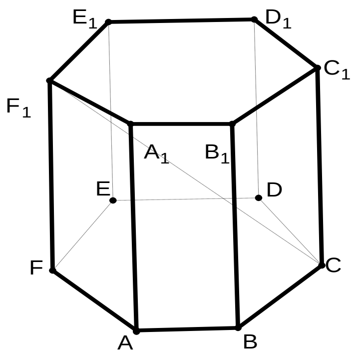
3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB = 10$, а боковое ребро $AA_1 = \sqrt{69}$. Найдите расстояние от точки A до прямой BC_1. Ответ: $\frac{120}{13}$.

4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB = 3\sqrt{2}$, а боковое ребро $SA = 5$. Найдите расстояние от точки A до прямой SC. Ответ: $\frac{24}{5}$.

Самостоятельная работа

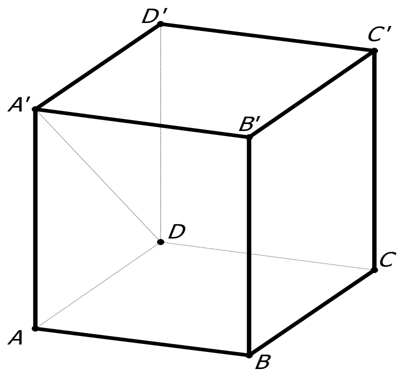
Вариант 1

В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой CF_1.



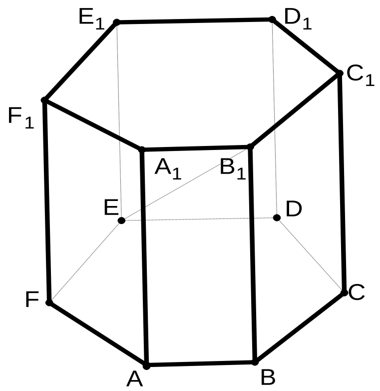
Вариант 2

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, все ребра которого равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой DA_1.



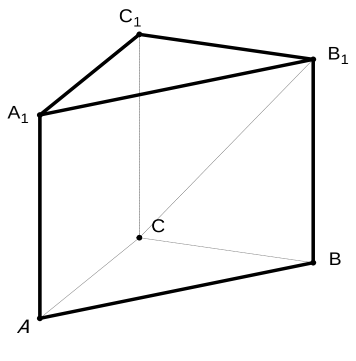
В а р и а н т 3

В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой EB_1.



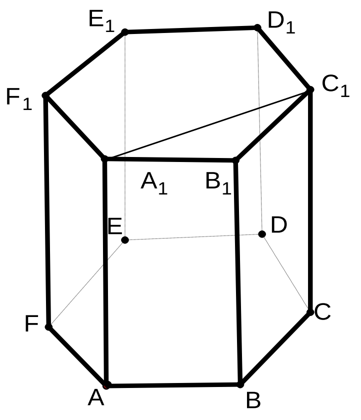
В а р и а н т 4

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой CB_1.



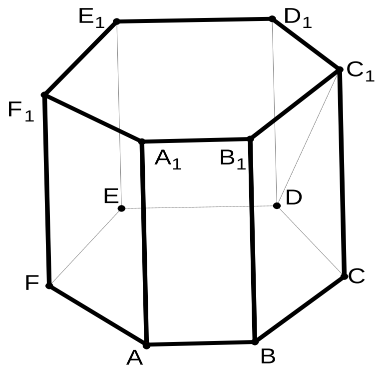
В а р и а н т 5

В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой A_1C_1.



В а р и а н т 6

В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой DC_1.



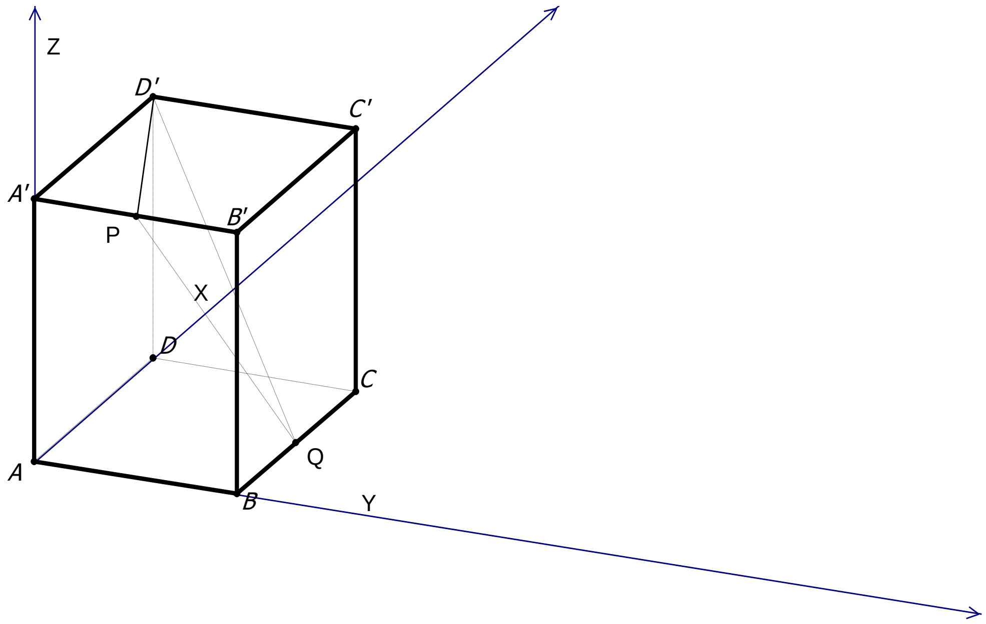
Ответы: 1. $\frac{\sqrt{30}}{5}$; 2. $\frac{\sqrt{6}}{2}$; 3. $\frac{\sqrt{30}}{5}$; 4. $\frac{\sqrt{14}}{4}$; 5. $\frac{\sqrt{5}}{2}$; 6. $\frac{\sqrt{30}}{4}$.

Метод координат

Проще всего использовать для единичного куба.

1. В единичном кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите расстояние от точки D' до прямой PQ, где P и Q — середины ребер $A'B'$ и BC соответственно.

Решение.



Рассмотрим прямоугольную систему координат с началом в точке A. Найдем координаты точек $P\left(0;\frac{1}{2};1\right), Q\left(\frac{1}{2};1;0\right), D'(1;0;1)$. Тогда $PQ=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,

$D'Q=\sqrt{\frac{1}{4}+1+1}=\frac{3}{2}$; $D'P=\sqrt{1+\frac{1}{4}+0}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Применяем теорему косинусов в $\Delta D'PQ$ для угла Q:

$\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{3}{2}\cos D'QP$; $\frac{5}{4}=\frac{6}{4}+\frac{9}{4}-\frac{3\sqrt{6}}{2}\cos Q$; $\frac{5}{2}=\frac{3\sqrt{6}}{2}\cos Q$

$\cos Q=\frac{5}{3\sqrt{6}}$; тогда $\sin Q=\sqrt{1-\frac{25}{54}}=\sqrt{\frac{29}{54}}$.

Искомое расстояние от точки D' до прямой PQ $h=D'Q\cdot\sin Q$;

$h=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{29}}{3\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{174}}{12}$.

2. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой BD_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Расстояние от точки до плоскости

Определение. Расстоянием от точки до плоскости, не проходящей через эту точку, называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость.

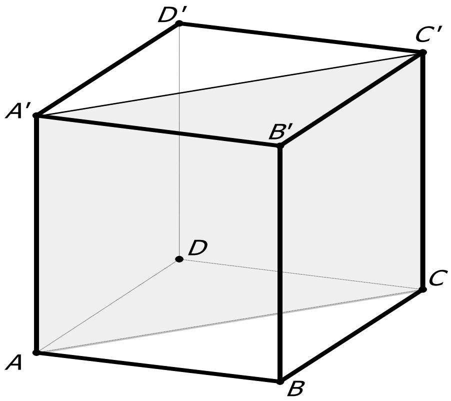
Расстояние от точки M до плоскости α равно расстоянию до плоскости α от произвольной точки P, лежащей на прямой l, которая проходит через точку M и параллельна плоскости α.

П р и з м ы

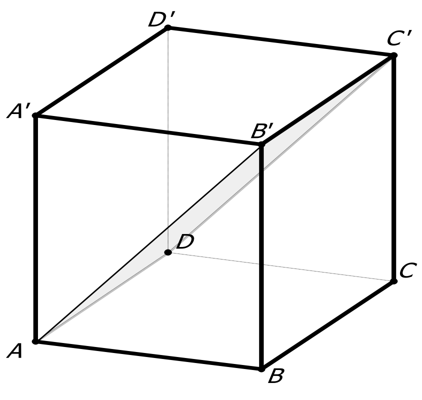
Занятие 1

Устно

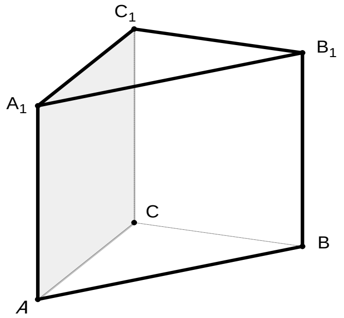
1. В кубе $ABCDA'B'C'D'$, ребра которого равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние от точки B до плоскости ACC'.



2. В кубе $ABCDA'B'C'D'$, ребра которого равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние от точки B до плоскости $AB'C'$.

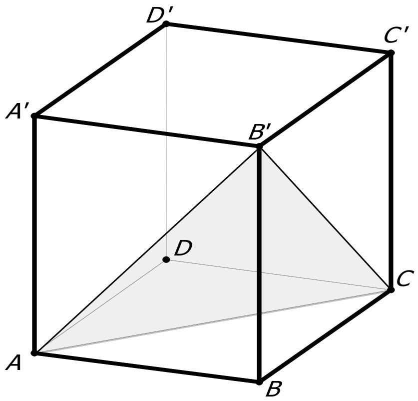


3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны $\sqrt{3}$, найдите расстояние от точки B до плоскости ACC_1.

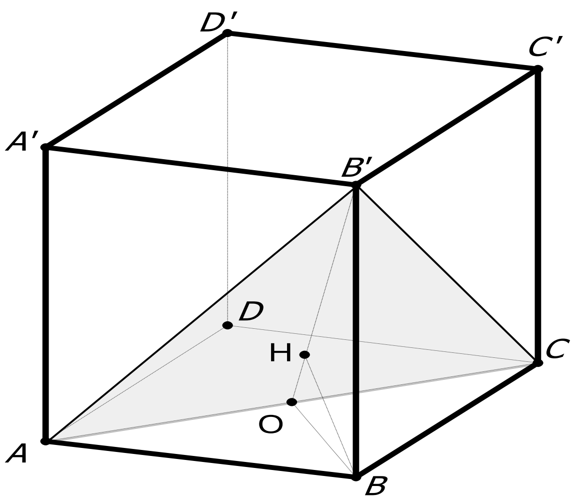


Работа в тетради

1. В единичном кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите расстояние от точки B до плоскости ACB'.



Решение.



Объясните по чертежу, почему BH — искомое расстояние от точки B до плоскости ACB'?

$\Delta OBB'$ — прямоугольный, $BH \perp OB'$.

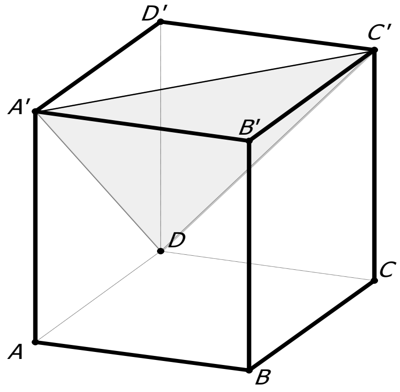
$OB = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $BB' = 1 \Rightarrow OB' = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot BH$$

$BH = ...$

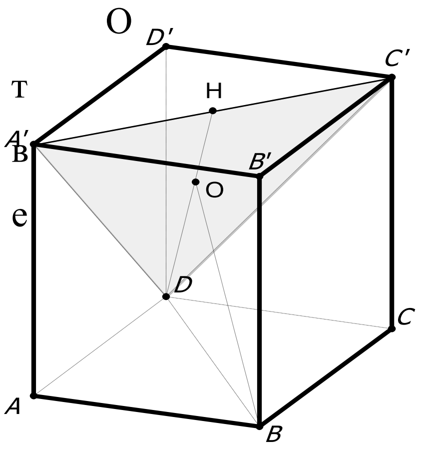
Ответ:

2. В единичном кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите расстояние от точки B до плоскости $DA'C'$.



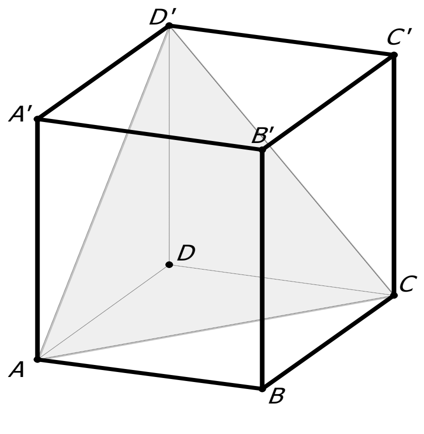
Решение.

Проведите решение с помощью чертежа.



Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2. В единичном кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите расстояние от точки B до плоскости ACD'.



Решение.

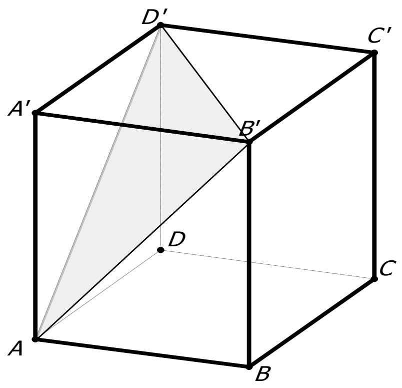
Сделайте чертеж.

Объясните, как использовать следующую формулу:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

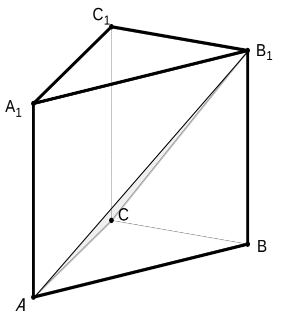
3. В единичном кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите расстояние от точки B до плоскости $AB'D'$.



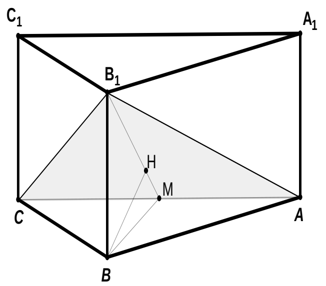
Решите самостоятельно.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости ACB_1.



Решение.



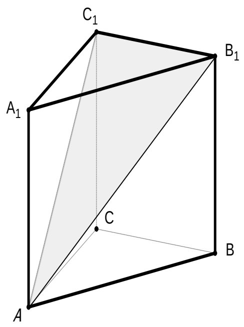
BH — искомое расстояние от точки B до плоскости ACB_1.

BH — высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного ΔACB_1.

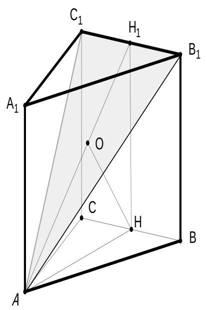
Объясните, почему $B_1M = \frac{\sqrt{7}}{2}$ и $BH = \frac{\sqrt{21}}{7}$?

Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости AC_1B_1.



Решение.

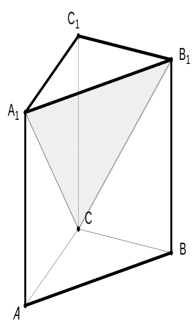


Прокомментируйте чертеж и докажите, что HO — искомое расстояние.

Найдите HO.

7. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости CA_1B_1.

Решение.



Самостоятельно сделайте чертеж и докажите, что ответ в данной задаче совпадает с ответом в задаче 6.

Домашнее задание

1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки C_1 до плоскости AB_1C.

З а м е ч а н и е: Так как $A_1C_1 \parallel AC$, то $A_1C_1 \parallel AB_1C$, поэтому искомое расстояние равно расстоянию от произвольной точки прямой A_1C_1 до плоскости AB_1C, например, от центра квадрата $A_1B_1C_1D_1$. Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно $\sqrt{3}$. Найдите расстояние от вершины C до плоскости BDC_1. Ответ: 1.

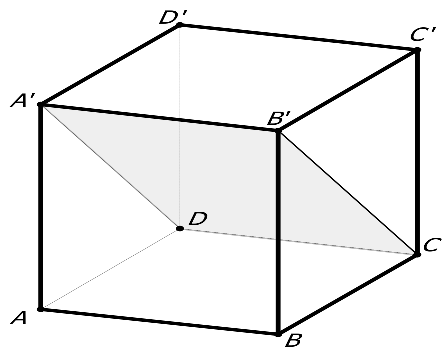
3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 4, точки E и F — середины ребер AB и B_1C_1 соответственно, а точка P расположена на ребре CD так, что $CP = 3PD$. Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости треугольника EPF.

Ответ: $\frac{12\sqrt{93}}{31}$.

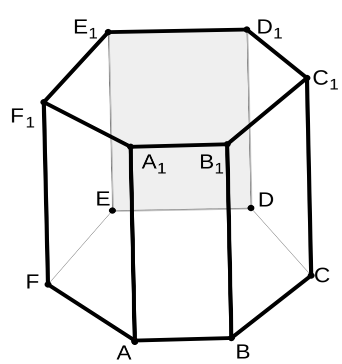
Занятие 2

Устно

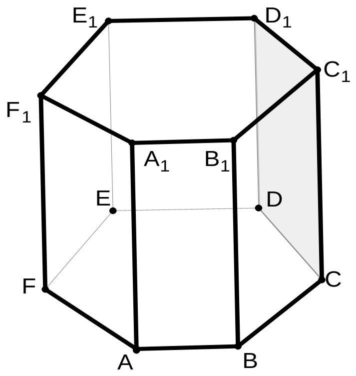
1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребра которого равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние от точки B до плоскости CDD'.



2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$, все ребра которой равны $\sqrt{3}$, найдите расстояние от точки B до плоскости DEE_1.

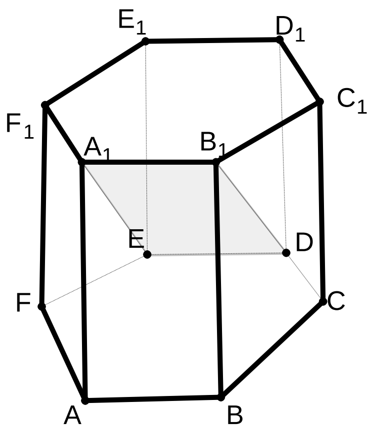


3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$, все ребра которой равны $\sqrt{3}$, найдите расстояние от точки B до плоскости CDD_1.



Работа в тетради

1. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости DEA_1.

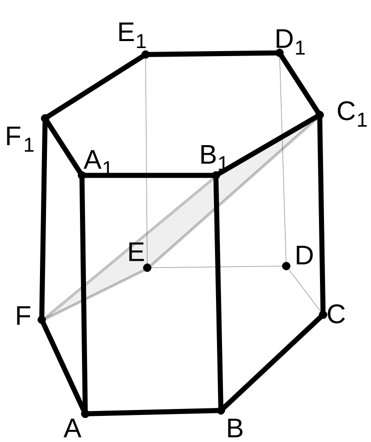


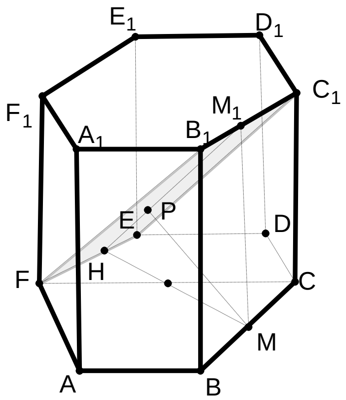
Решение.

Сделайте чертеж, покажите искомое расстояние. Прокомментируйте формулу: $1 \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot h$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости EFB_1.





Искомое расстояние — PM .

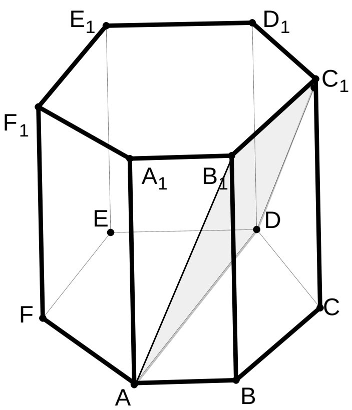
Объясните, почему?

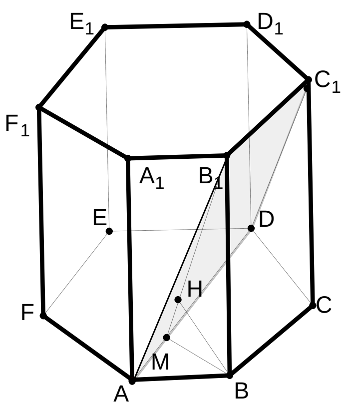
Проведите вычисления.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение.

3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости ADC_1 .



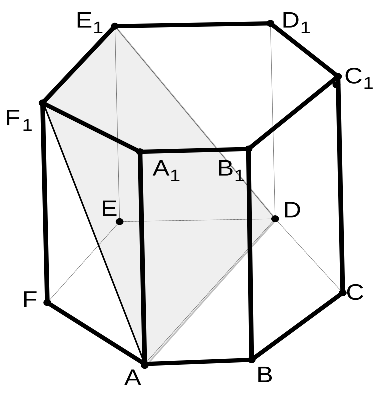


Решение.

Продолжите решение по готовому чертежу.

Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

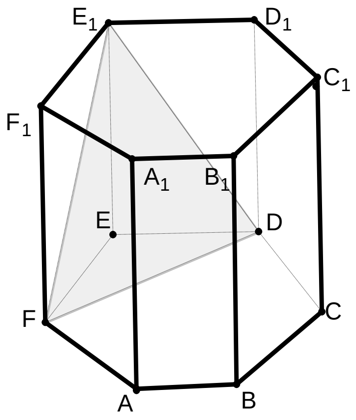
4. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости ADC_1 .



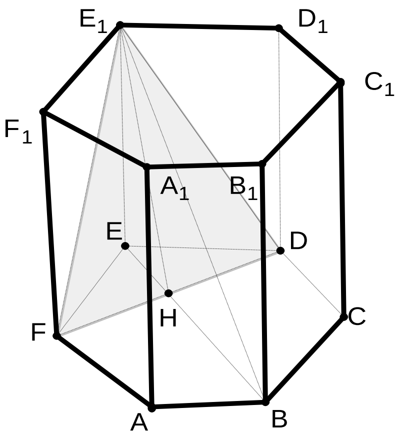
Решение проведите самостоятельно.

Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

5. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости DFE_1.



Решение.



Работаем в ΔE_1HB. Пусть h — высота из точки B на сторону E_1H .

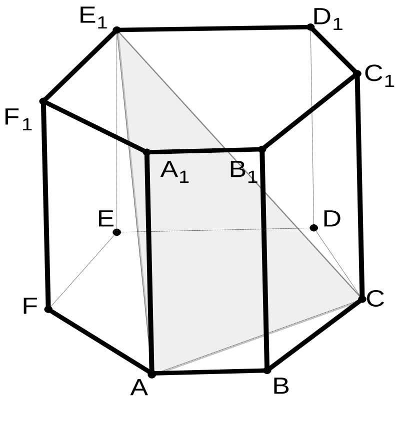
Прокомментируйте формулу

$BH \cdot BE_1 \cdot \sin EBE_1 = E_1H \cdot h$.

Подставьте числовые значения и вычислите.

Ответ: $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

6. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости ACE_1.



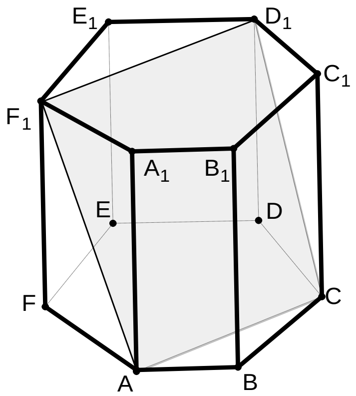
Решите самостоятельно.

Ответ: $\frac{\sqrt{13}}{13}$.

Домашнее задание

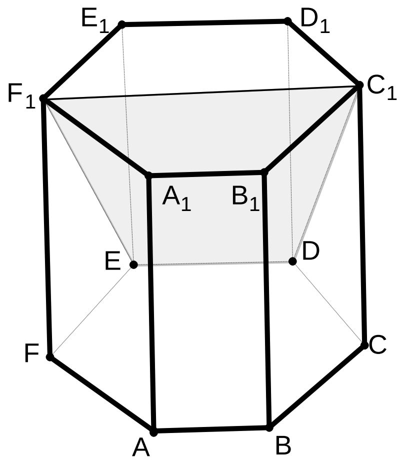
1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Точка M лежит на ребре AB и делит его на отрезки $AM = 3$ и $BM = 5$. Найдите расстояние от точки M до каждой из плоскостей: ADA_1; BCB_1; $A_1B_1C_1$; DCC_1. Ответ: 3, 5, 8, 8.

2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости ACD_1.



Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости DEF_1.



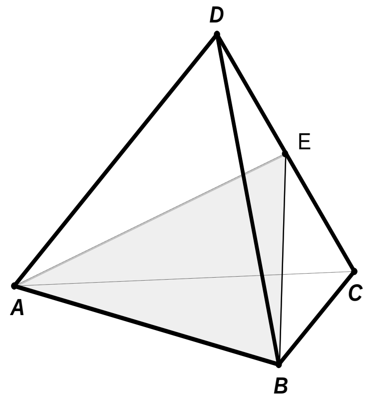
Ответ: $\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

П и р а м и д ы

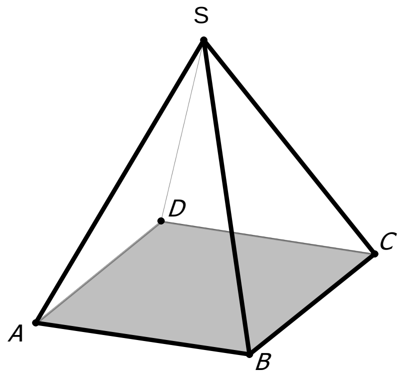
Занятие 3

Устно

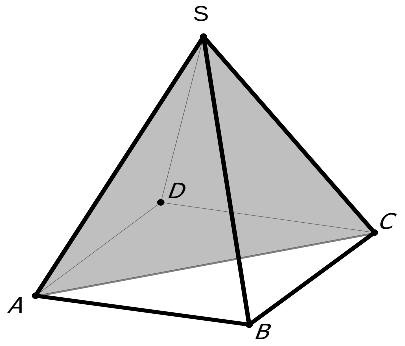
1. В единичном тетраэдре $ABCD$ точка E — середина ребра CD. Найдите расстояние от точки D до плоскости ABE.



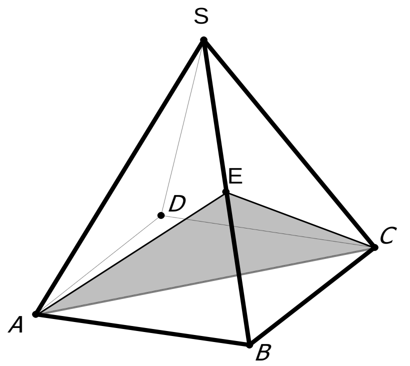
2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние от точки S до плоскости ABC.



3. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние от точки B до плоскости SAC.

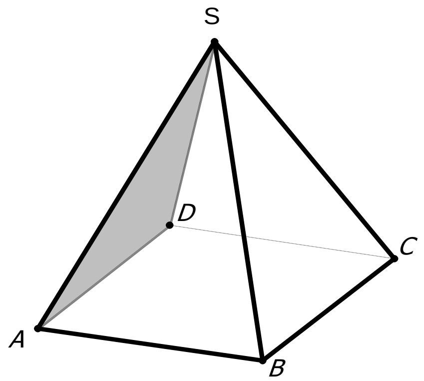


4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны $\sqrt{2}$, точка E — середина ребра SB. Найдите расстояние от точки B до плоскости ACE.

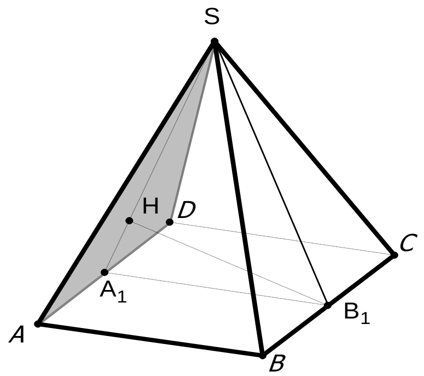


Работа в тетради

1. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости SAD.



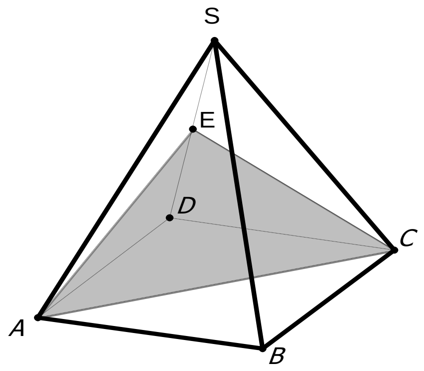
Решение.



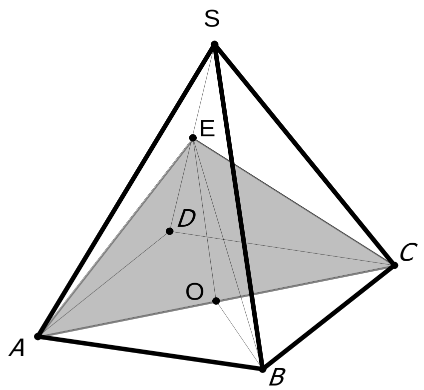
Прокомментируйте чертеж и проведите вычисления.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точка E — середина ребра SD. Найдите расстояние от точки B до плоскости ACE.



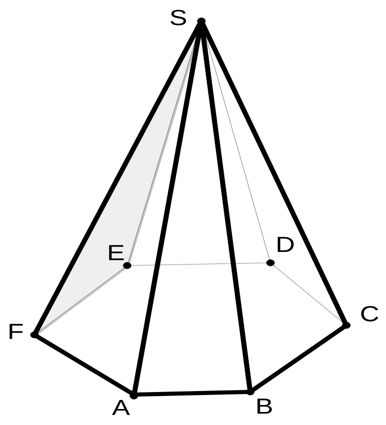
Решение.



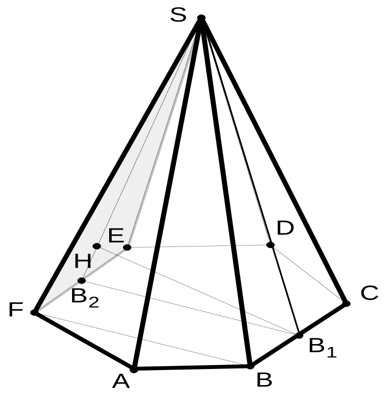
Прокомментируйте чертеж и проведите вычисления.

Ответ: 0,5.

3. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки B до плоскости SEF.



Решение.

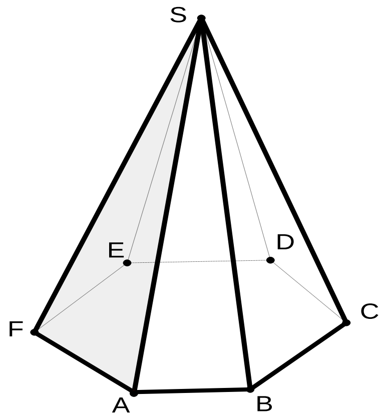


B_1H — искомое расстояние от точки B до плоскости SEF. Объясните, почему.

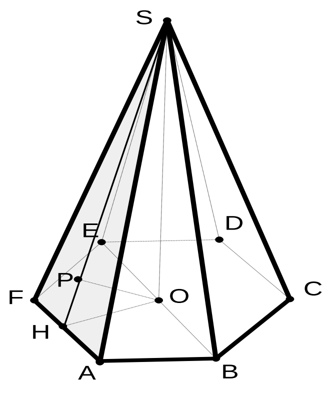
Найдите его.

Ответ: $\frac{2\sqrt{15}}{5}$.

4. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки B до плоскости SCD.



Решение.



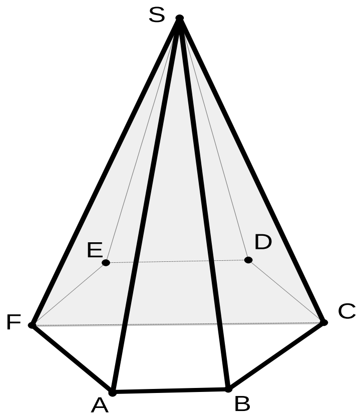
$OH = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $OS = \sqrt{3}$, $SH = \frac{\sqrt{15}}{2}$.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot OP$$

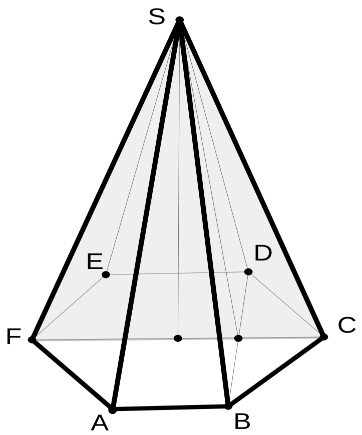
$$OP = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

Прокомментируйте решение.

5. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки B до плоскости SCF.

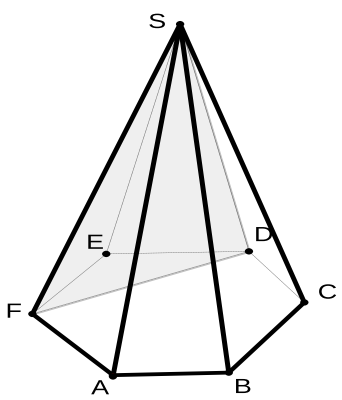


Решение.

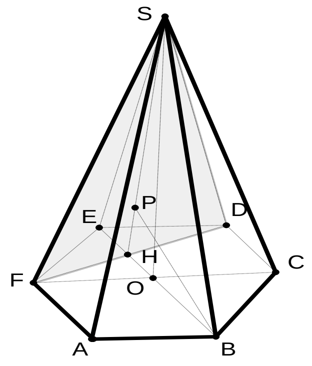


Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Объясните, почему.

6. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки B до плоскости SDF.



Решение.



Рассматриваем ΔHSB.

$HB = \frac{3}{2}$, $OS = \sqrt{3}$, $HS = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

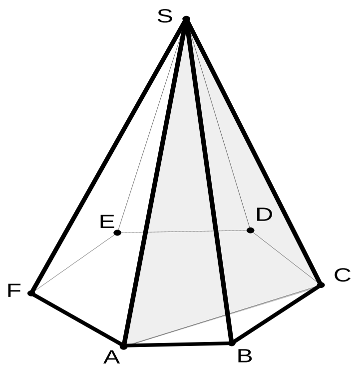
Прокомментируйте.

Найдите BP.

Ответ: $\frac{3\sqrt{39}}{13}$.

Искомое расстояние — BP. Объясните, почему?

7. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки B до плоскости SAC.

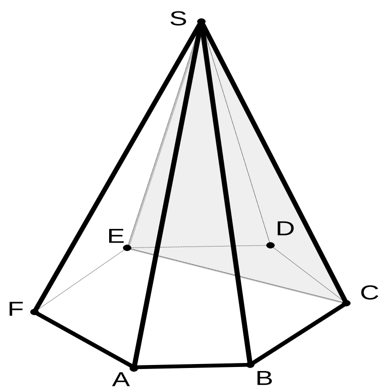


Решите самостоятельно.

Ответ: $\frac{\sqrt{39}}{13}$.

Домашнее задание

1. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки B до плоскости SCE.



Ответ: $\frac{2\sqrt{39}}{13}$.

2. В единичном тетраэдре $ABCD$ найдите расстояние от точки D до плоскости ABC. Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

3. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 3, высота 2. Найдите расстояние от вершины A до грани SCD. Ответ: 2,4.

4. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 4, найдите расстояние от середины ребра BC до плоскости грани ESD. Ответ: $\frac{3\sqrt{35}}{14}$.

Подготовка к самостоятельной работе

1. Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром $\sqrt{6}$. Найдите расстояние от вершины A до плоскости BDC. Ответ: 2.

2. Ребро AD пирамиды $DABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC. Найдите расстояние от вершины A до плоскости, проходящей через середины ребер AB, AC и AD, если $AD = 2\sqrt{5}, AB = AC = 10, BC = 4\sqrt{5}$. Ответ: 2.

3. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 12 см. Найдите расстояние от центра основания до боковой грани, если двугранный угол при ребре основания равен 60^0. Ответ: 3.

4. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания $AB = 2$, боковое ребро $SA = \sqrt{7}$. Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBD. Ответ: $\sqrt{3}$.

5. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 3, а боковые ребра равны 4, на боковом ребре AA_1 взята точка E так, что $AE = 2$. Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости B_1CE.

Ответ: $\frac{6\sqrt{29}}{29}$.

Самостоятельная работа

В а р и а н т 1

В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки A до плоскости SBC.

В а р и а н т 2

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки B до плоскости DA_1C_1.

В а р и а н т 3

В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости CEF_1.

В а р и а н т 4

В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки A до плоскости SBF.

В а р и а н т 5

В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости CFA_1.

В а р и а н т 6

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точка E — середина ребра SB. Найдите расстояние от точки B до плоскости ACE.

Ответы: 1. $\frac{\sqrt{15}}{5}$; 2. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; 3. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; 4. $\frac{\sqrt{39}}{13}$; 5. $\frac{\sqrt{21}}{7}$; 6. 0,5.

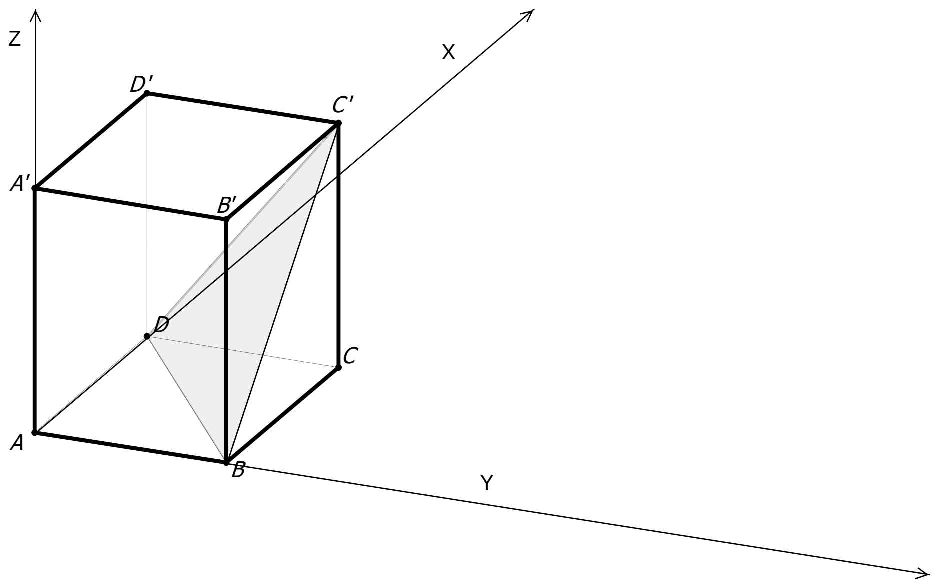
Метод координат

Расстояние от точки M до плоскости α можно вычислить по формуле

$$\rho(M, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

где $M(x_0; y_0; z_0)$, а плоскость α задана уравнением $ax + by + cz + d = 0$.

1. В единичном кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите расстояние от точки A_1 до плоскости BDC'.



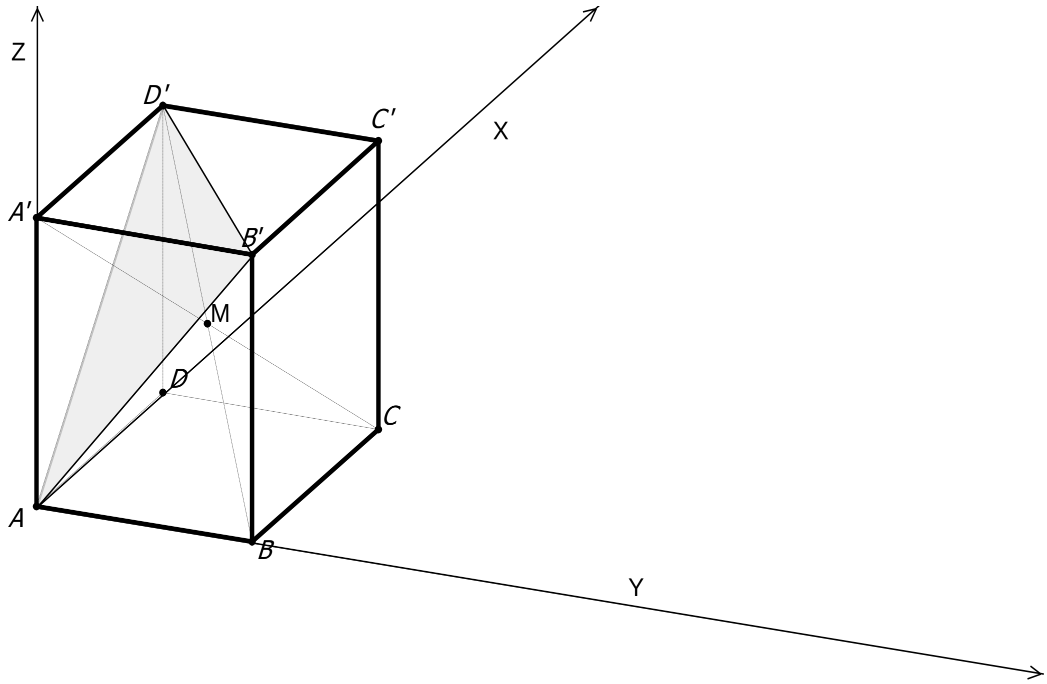
B$(0;1;0)$; $D(1;0;0)$; $C'\ (1;1;1)$; $\alpha:\ ax+by+cz+d=0$; $\begin{cases} b+d=0, \\ a+d=0 \\ a+b+c+d=0 \end{cases}$ $\begin{cases} b=-d, \\ a=-d, \\ c=d \end{cases}$

$\alpha:\ -dx-dy+dz+d=0$; $-x-y+z+1=0$ или $x+y-z-1=0$

По формуле находим расстояние от точки $A'(0;0;1)$ до плоскости α:

$$\rho=\frac{|0+0-1-1|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

2. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ его диагонали $A'C$ и BD' пересекаются в точке M. Найдите расстояние от точки M до плоскости $AB'D'$, если ребро куба равно 6.



$A(0;0;0), B'(0;6;6), D'(6;0;6)$, $M(3;3;3)$; α; $ax+by+cz+d=0$

$\begin{cases} d=0, \\ 6b+6c=0, \\ 6a+6c=0 \end{cases}$ $\begin{cases} d=0, \\ b=-c, \\ a=-c \end{cases}$ $-cx-cy+cz=0$; $x+y-z=0$; $\rho=\dfrac{|3+3-3|}{\sqrt{1+1+1}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

3. $MABCD$ — правильная четырехугольная пирамида. Ребро основания пирамиды равно 6, а ее высота равна 4. Найдите расстояние от вершины A до плоскости MDC. Ответ: 4,8.

Расстояние между прямыми в пространстве

Определение. Расстоянием между двумя непересекающимися прямыми в пространстве называется длина общего перпендикуляра, проведенного к этим прямым.

Для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми можно воспользоваться одним из приведенных ниже способов.

1. Построить общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых (отрезок с концами на этих прямых и перпендикулярный обеим) и найти его длину.

2. Построить плоскость, содержащую одну из прямых и параллельную второй. Тогда искомое расстояние будет равно расстоянию от какой-нибудь точки второй прямой до построенной плоскости.

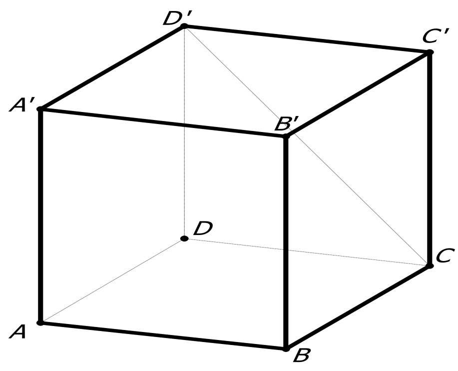
3. Заключить данные прямые в параллельные плоскости, проходящие через данные скрещивающиеся прямые, и найти расстояние между этими плоскостями.

4. Построить плоскость, перпендикулярную одной из данных прямых, и построить на этой плоскости ортогональную проекцию второй прямой.

П р и з м ы

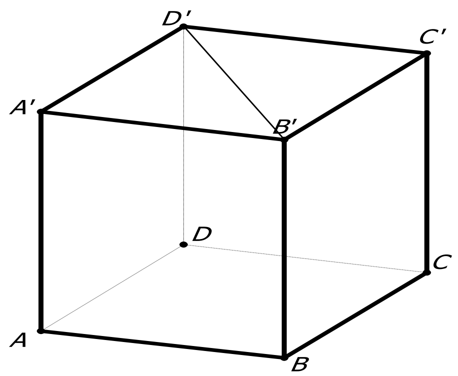
Устно

1. В единичном кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите расстояние между прямыми AB и CD'.



Возможное решение: так как плоскость CDD', содержащая CD', параллельна AB, то расстояние между прямыми AB и CD' $AD = 1$.

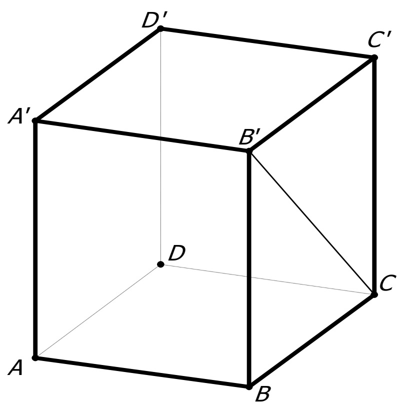
2. В единичном кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите расстояние между прямыми AB и $B'D'$.



3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребра которого равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние между прямыми AB и C_1D_1. Ответ: 2.

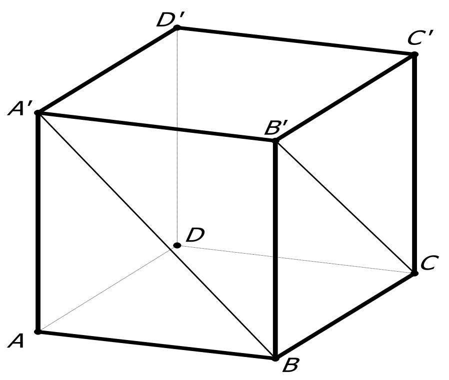
4. В кубе $ABCDA'B'C'D'$, ребра которого равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние между прямыми AB и CB'.

Ответ: 1

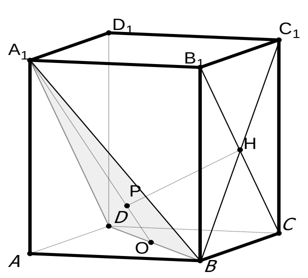


Работа в тетради

1. В единичном кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите расстояние между прямыми BA' и CB'.



Решение.



Плоскость $A'DB$, содержащая $A'B$, параллельна $B'C$. Поэтому из любой точки прямой $B'C$ опускаем перпендикуляр на плоскость $A'DB$, находим расстояние HP.

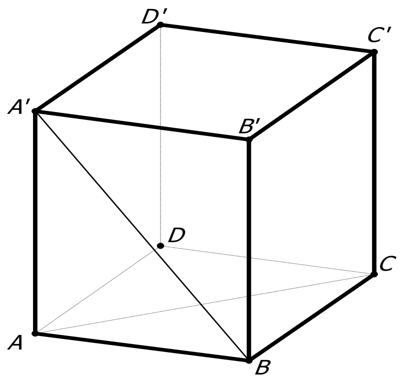
1. $\Delta A'DB$ — равносторонний со стороной $\sqrt{2}$.

$$A'O = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow PO = \frac{1}{3}, A'O = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

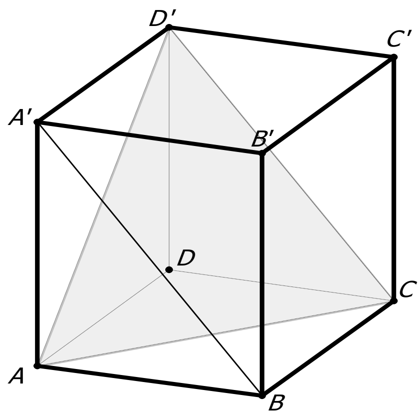
2. $OH = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. ΔPHO — прямоугольный: $PH = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{2}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. В единичном кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите расстояние между прямыми BA' и AC.



Решение.

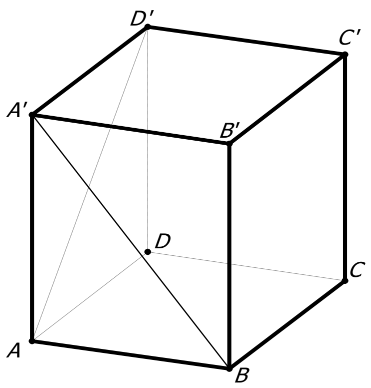


Продолжите построение: от любой точки прямой $A'B$ постройте перпендикуляр на плоскость $AD'C$ и найдите его.

Докажите, что ответ $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

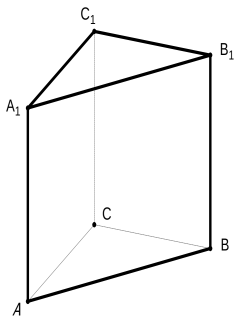
Плоскость $AD'C$, содержащая прямую AC, параллельна $A'B$.

3. В единичном кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите расстояние между прямыми BA' и AD'.



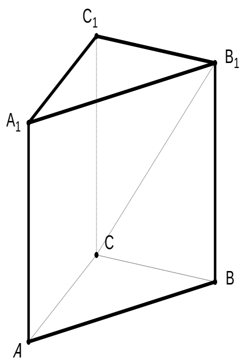
Проведите решение самостоятельно и докажите, что ответ $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми CC_1 и AB.

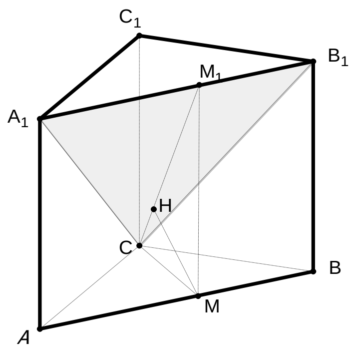


Докажите, что ответ $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми CB_1 и AB.



Решение.

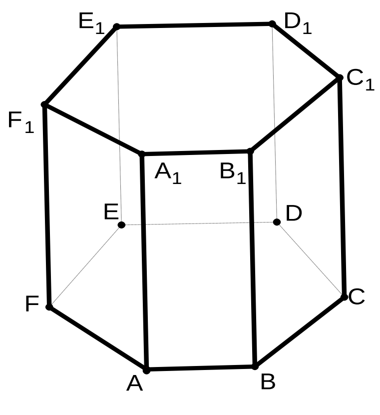


Плоскость CA_1B_1, содержащая прямую CB_1, параллельна прямой AB. Значит, искомое расстояние между прямыми CB_1 и AB равно расстоянию между прямой AB и плоскостью CA_1B_1. Точка M — середина AB. $MH \perp A_1CB_1$. MH — искомое расстояние.

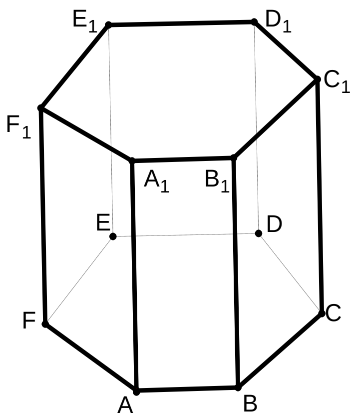
Вычисления проведите самостоятельно. Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

6. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BC и EE_1.

Ответ: $\sqrt{3}$.

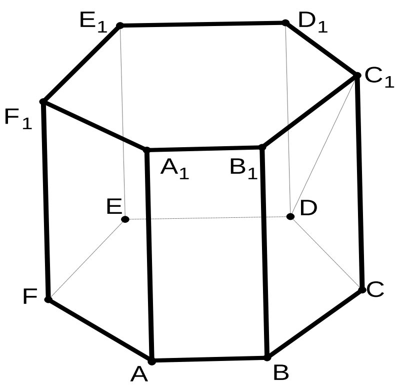


7. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и C_1D_1.



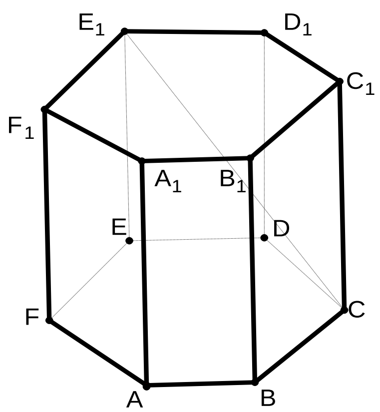
Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и C_1D.

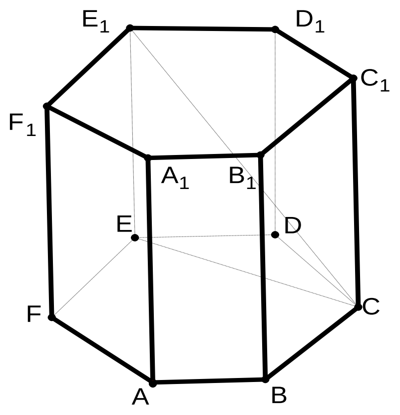


Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

9. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и CE_1.



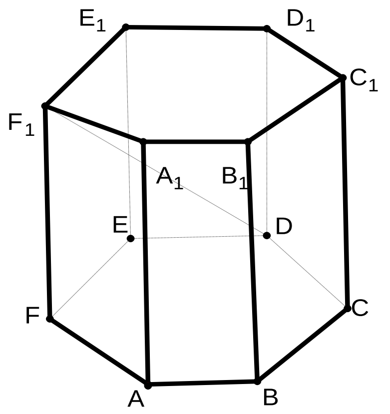
Решение.



$BC \perp EC$

Ответ: 1.

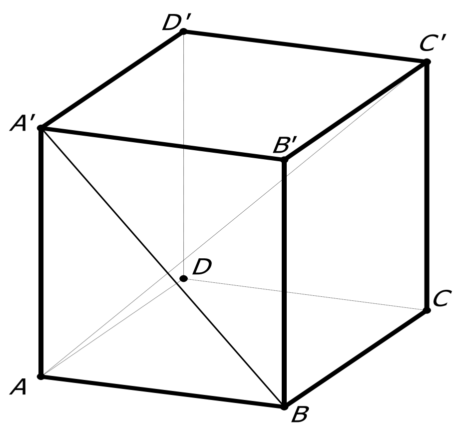
10. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и DF_1.



Ответ: 1,5.

Домашнее задание

1. В единичном кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите расстояние между прямыми BA' и AC'.



Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и AD_1. Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

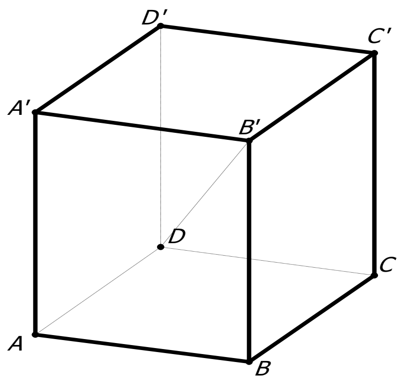
3. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми BA_1 и B_1D_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

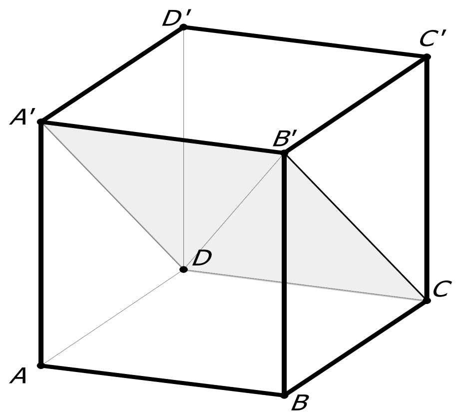
П и р а м и д ы

Устно

1. В кубе $ABCDA'B'C'D'$, ребра которого равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние между прямыми AB и DB'.

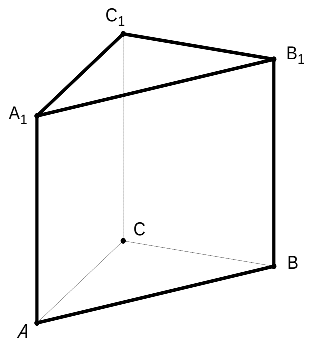


Решение.



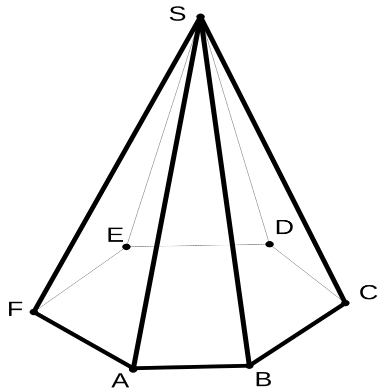
Ответ: 1.

2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB и B_1C_1.



Ответ: 1.

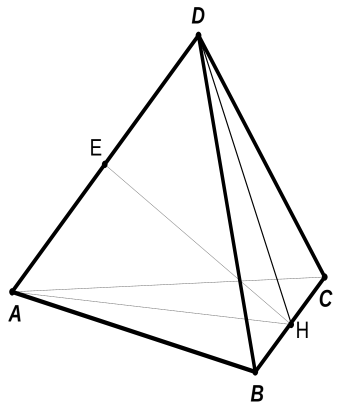
3. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны $\sqrt{3}$, найдите расстояние между прямыми BC и EF.



Ответ: 3.

Работа в тетради

1. В единичном тетраэдре $ABCD$ найдите расстояние между прямыми AD и BC.



Решение.

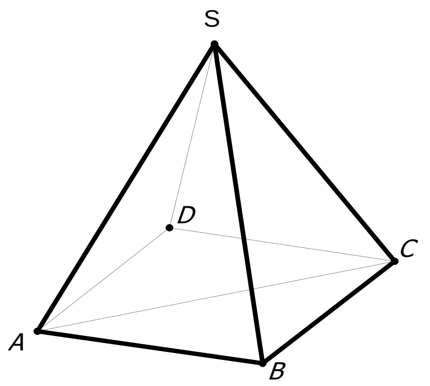
Точка H — середина ребра BC. Плоскость $ADH \perp BC \Rightarrow EH \perp BC$.

ΔADH — равнобедренный с основанием AD. Так как точка E — середина AD, то $HE \perp AD$.

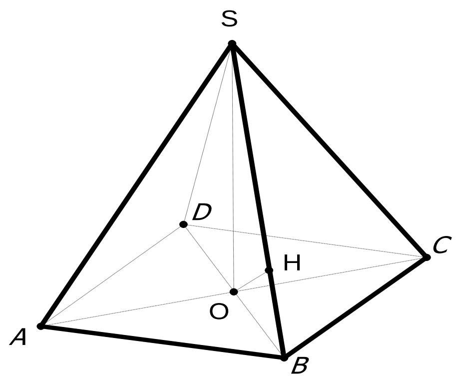
HE — общий перпендикуляр к AD и BC.

$AE = \dfrac{1}{2}$, $AH = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми SB и AC.



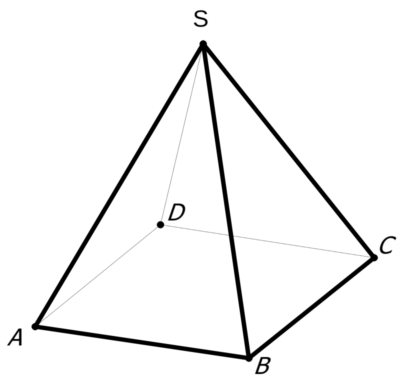
Решение.



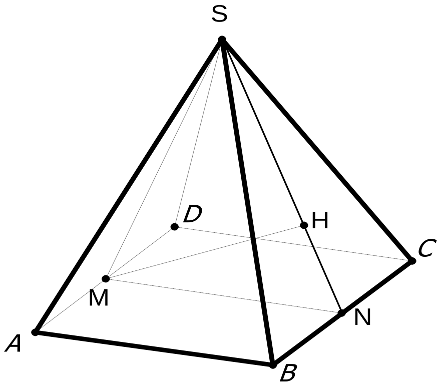
Объясните, почему OH — искомое расстояние и найдите его.

Ответ: 0,5.

3. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми SB и AD.



Решение.

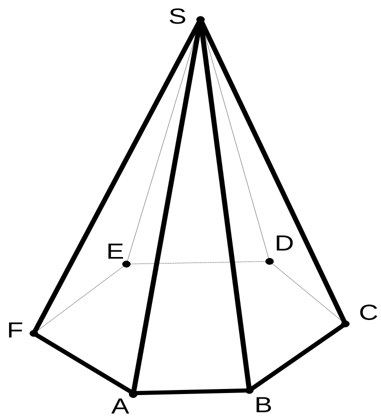


Почему MH — искомое расстояние?

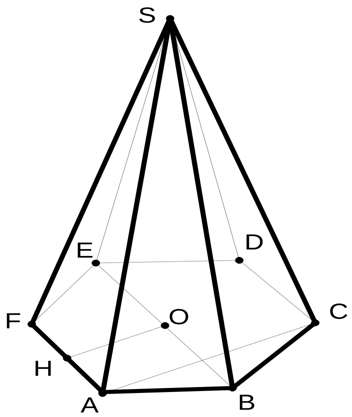
Вычислите его самостоятельно.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

4. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние между прямыми SB и AF.



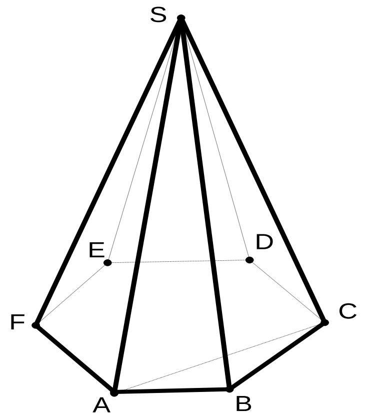
Решение.



Прокомментируйте чертеж и вычислите расстояние.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние между прямыми SB и AC.



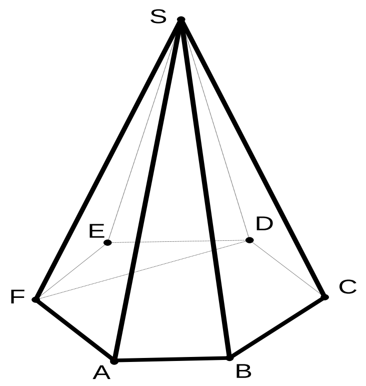
Решение.

Решите самостоятельно.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Домашнее задание

1. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние между прямыми SB и DF.



Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

2. В пирамиде $DABC$ известны длины ребер: $AB = AC = DB = DC = 10$, $BC = DA = 12$. Найдите расстояние между прямыми DA и BC. Ответ: $2\sqrt{7}$.

3. В тетраэдре $ABCD$ известно, что $AC = BD = 14, BC = AD = 13, AB = CD = 15$. Найдите расстояние между прямыми AC и BD. Ответ: $3\sqrt{11}$.

4. Сторона основания ABC правильной треугольной пирамиды $ABCD$ равна $8\sqrt{3}$, высота пирамиды $DO = 6$. Точки A_1, C_1 — середины ребер AD и CD соответственно. Найдите расстояние между прямыми BA_1 и AC_1.

Ответ: $\frac{36\sqrt{259}}{259}$.

Самостоятельная работа

Вариант 1

В правильном тетраэдре $PABCD$ с ребром 1 точки M и K — середины ребер соответственно BP и CP, точка O — центр основания ABC. Найдите расстояние между прямыми MK и OP. Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Вариант 2

В правильном тетраэдре $PABCD$

с ребром 1 точки M и K — середины ребер соответственно BP и CP, точка O — центр основания ABC. Найдите расстояние между прямыми MK и AB. Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Вариант 3

Дан единичный куб $MNPQM_1N_1P_1Q_1$. K — середина ребра N_1P_1. Найдите расстояние между прямыми QQ_1 и M_1K. Ответ: $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Вариант 4

Дан единичный куб $MNPQM_1N_1P_1Q_1$. K — середина ребра N_1P_1. Найдите расстояние между прямыми NP и MK. Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

В а р и а н т 5

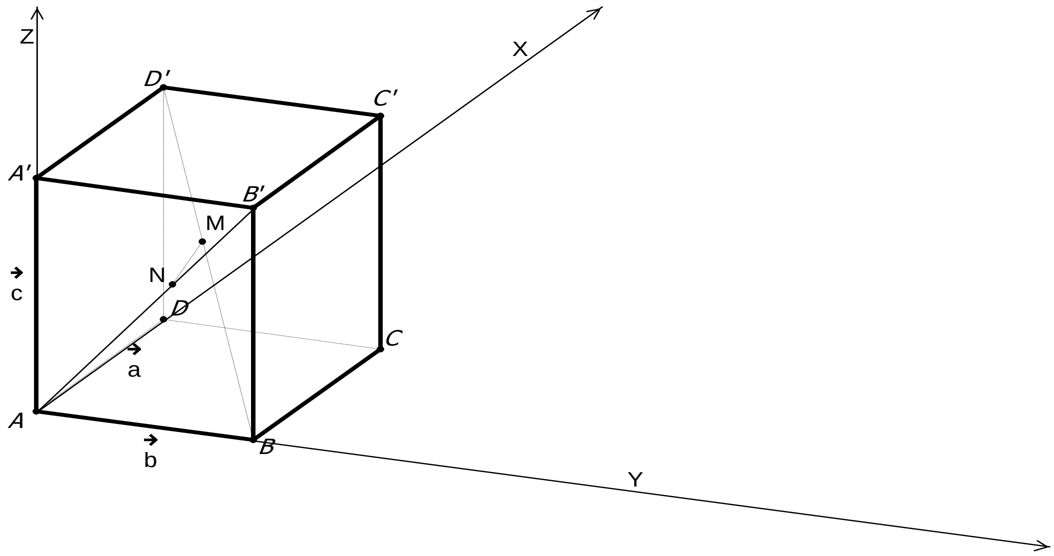
Дан единичный куб $MNPQM_1N_1P_1Q_1$. K — середина ребра N_1P_1. Найдите расстояние между прямыми NQ и MK. Ответ: $\frac{2\sqrt{17}}{17}$.

В а р и а н т 6

Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. K — середина ребра B_1C_1. Найдите расстояние между прямыми DD_1 и A_1K. Ответ: $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Векторный метод решения

1. Дан единичный куб $ABCDA'B'C'D'$. Найти расстояние между диагональю куба BD' и диагональю грани AB'.



Введем прямоугольную систему координат.

Пусть MN — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых BD' и AB'.

Искомое расстояние — MN.

Пусть $\vec{AD} = \vec{a}, \vec{AB} = \vec{b},\ \vec{AA'} = \vec{c}$, тогда $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c} = 0$

$$\vec{AB'} = \vec{b} + \vec{c}, \vec{D'B} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$$

$$\vec{c} + \vec{a} + \vec{D'M} + \vec{MN} + \vec{NA} = 0 \ \Rightarrow \vec{MN} = y\vec{AB'} - \vec{a} - x\vec{D'B} - \vec{c}$$

$$\vec{MN} = y\left(\vec{b} + \vec{c}\right) - \vec{a} - x\left(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}\right) - \vec{c} = (-1 - x)\vec{a} + (x + y)\vec{b} + (y - x - 1)\vec{c}$$

Вектор $\vec{MN} \perp \vec{AB'}$ и $\vec{MN} \perp \vec{D'B}$, поэтому имеем $\begin{cases} \vec{MN} \cdot \vec{AB'} = 0 \\ \vec{MN} \cdot \vec{D'B} = 0 \end{cases}$

Первое условие системы: $\left((-1-x)\vec{a} + (x+y)\vec{b} + (y-x-1)\vec{c}\right)\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = 0$

$(x+y)\vec{b}^2 + (y-x-1)\vec{c}^2 = 0$

$x + y + y - x - 1 = 0 \quad y = \frac{1}{2}$

Второе условие системы: $\left((-1-x)\vec{a} + (x+y)\vec{b} + (y-x-1)\vec{c}\right)\left(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}\right) = 0$

$(-1-x)\vec{a}^2 + (y-x-1)\vec{c}^2 - (x+y)\vec{b}^2 = 0$

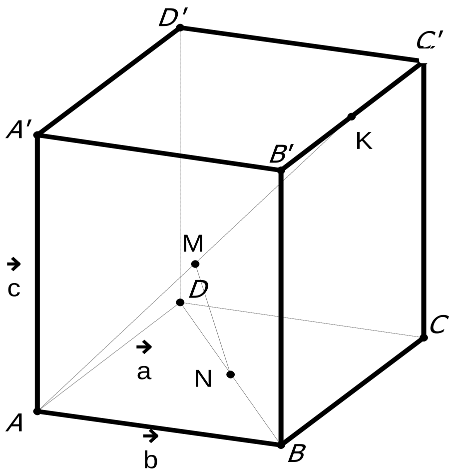
$-1 - x + y - x - 1 - x - y = 0 \quad x = -\frac{2}{3}$

$\vec{MN}\left\{-1+\frac{2}{3}; \frac{1}{2}-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}+\frac{2}{3}-1\right\}$

$\vec{MN}\left\{-\frac{1}{3}; -\frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right\}$

$\left|\vec{MN}\right| = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

2. Дан единичный куб $ABCDA'B'C'D'$. K — середина ребра $B'C'$. Найти расстояние между прямыми AK и BD.



Решение.

MN — искомое расстояние

$\vec{DB} = \vec{a} - \vec{b}$ $\vec{AK} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c}$; $x\vec{AK} + \vec{MN} + y\vec{DB} - \vec{b} = 0$

$$\vec{MN}=\vec{b}-x\left(\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{c}\right)-y\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\left(-\frac{1}{2}x-y\right)\vec{a}+(1-x+y)\vec{b}+(-x)\vec{c}$$

$$\begin{cases}\vec{MN}\cdot\vec{DB}=0\\ \vec{MN}\cdot\vec{AK}=0\end{cases}\quad\begin{cases}\left(\left(-\frac{1}{2}x-y\right)\vec{a}+(1-x+y)\vec{b}+(-x)\vec{c}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0\\ \left(\left(-\frac{1}{2}x-y\right)\vec{a}+(1-x+y)\vec{b}+(-x)\vec{c}\right)\left(\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{c}\right)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(-\frac{1}{2}x-y\right)\vec{a}^{\,2}-(1-x+y)\vec{b}^{\,2}=0\\ (1-x+y)\vec{b}^{\,2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x-y\right)\vec{a}^{\,2}-x\vec{c}^{\,2}=0\end{cases};\quad\begin{cases}-\frac{1}{2}x-y-1+x-y=0\\ 1-x+y-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}y-x=0\end{cases}\quad\begin{cases}\frac{1}{2}x-2y-1=0\\ -\frac{9}{4}x+\frac{1}{2}y+1=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=4y+2\\ -9x+2y+4=0\end{cases}\quad\begin{cases}x=4y+2\\ -9(4y+2)+2y+4=0\end{cases}\quad\begin{cases}x=4y+2\\ -34y-14=0\end{cases}\quad\begin{cases}y=-\frac{7}{17}\\ x=\frac{6}{17}\end{cases};$$

$$\vec{MN}\left\{\frac{4}{17};\frac{4}{17};-\frac{6}{17}\right\}$$

$$\left|\vec{MN}\right|=\sqrt{\left(\frac{4}{17}\right)^2+\left(\frac{4}{17}\right)^2+\left(\frac{6}{17}\right)^2}=\sqrt{\frac{68}{289}}=\frac{2\sqrt{17}}{17}.$$

3. Дан единичный куб $MNPQM_1N_1P_1Q_1$. K — середина ребра N_1P_1. Найти расстояние между прямыми QK и MP_1. Ответ: 0.

Угол между прямыми в пространстве

Определение. Углом между двумя скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным.

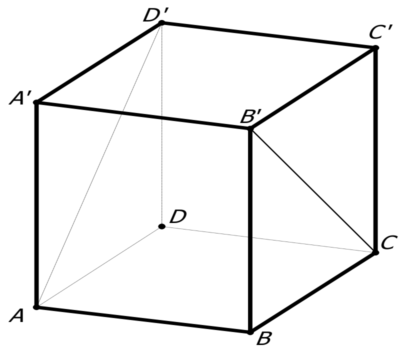
Теорема о трех перпендикулярах. Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна проекции наклонной на плоскость, то она перпендикулярна и самой наклонной. Справедливо и обратное утверждение. Сформулируйте его. Сделайте чертежи, иллюстрирующие прямую и обратную теорему о трех перпендикулярах.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая перпендикулярна двум пересекающим прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

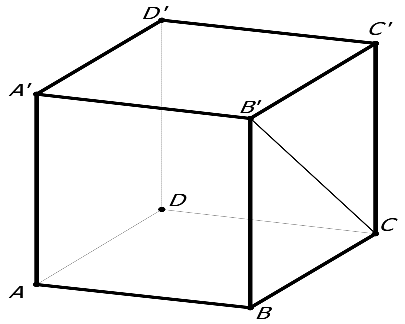
П р и з м ы

Устно

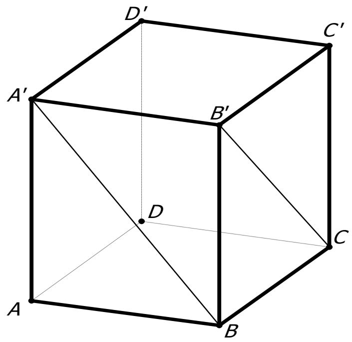
1. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите угол между прямыми CB' и AD'.



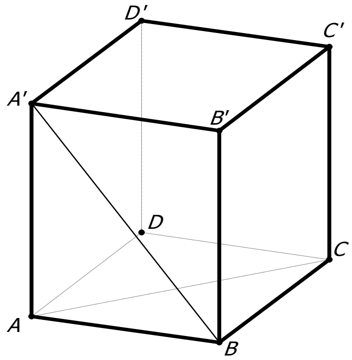
2. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите угол между прямыми CB' и AB.



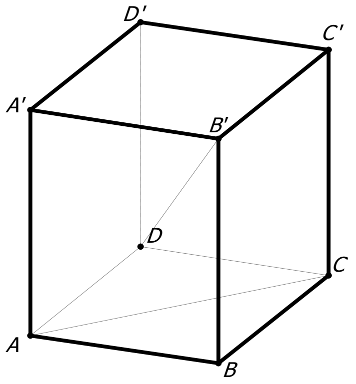
3. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите угол между прямыми BA' и CB'.



4. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите угол между прямыми BA' и AC.

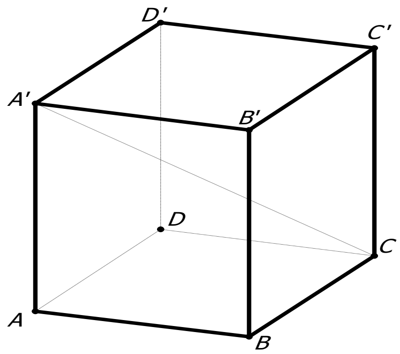


5. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите угол между прямыми DB' и AC.



Работа в тетради

1. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите косинус угла между прямыми AB и CA'.



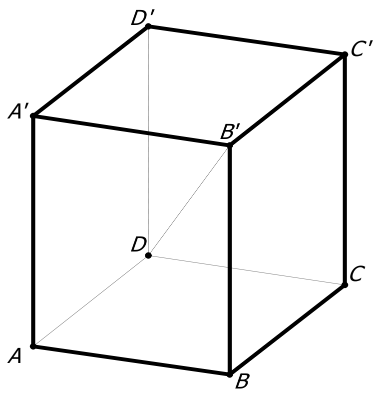
Решение.

Рассматриваем $\Delta A'DC$. Почему?

В $\Delta A'DC$ $\angle A'DC = 90^0$, искомый угол $\angle DCA'$.

$\cos DCA' = \dfrac{DC}{A'C} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Объясните, почему диагональ куба равна $\sqrt{3}$.

2. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите тангенс угла между прямыми AB и DB'.



Например, рассмотрим $\Delta A'B'D$. Он прямоугольный. Почему?

Покажите на чертеже прямой угол.

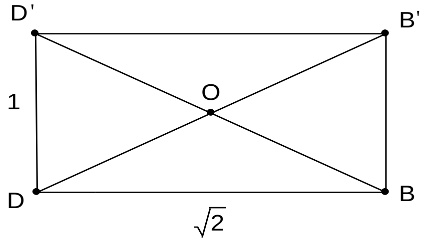
Ответ: $\sqrt{2}$.

3. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите косинус угла между прямыми BD' и DB'.

Решение.

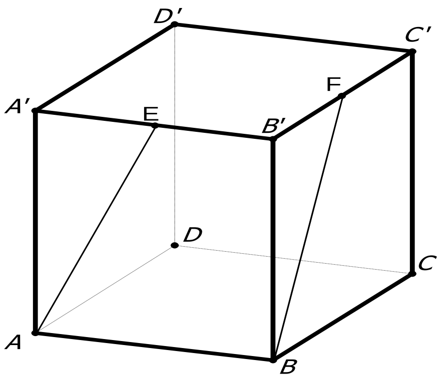
Как найти угол между диагоналями прямоугольника?

Используем теорему косинусов в $\Delta DOD'$.

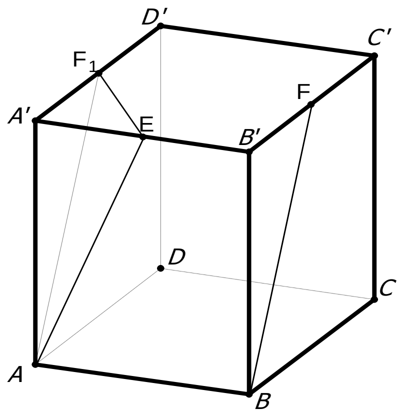


Ответ: $\frac{1}{3}$.

4. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ точки E и F — середины ребер соответственно $A'B'$ и $B'C'$. Найдите косинус угла между прямыми AE и BF.



Решение.



Искомый угол?

Прокомментируйте теорему косинусов в ΔAEF_1:

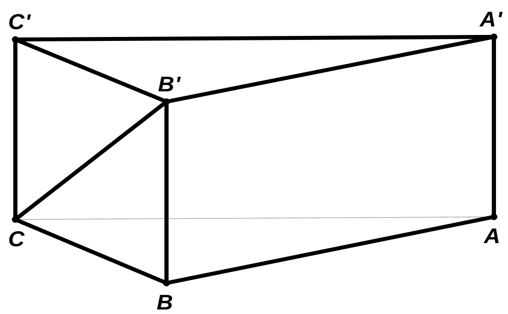
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}.$$

Ответ: 0,8.

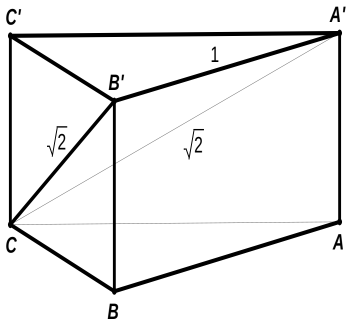
Почему мы рассматриваем ΔAEF_1?

5. В правильной треугольной призме $ABCA'B'C'$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB и CB'.



Решение.

Прямая $AB \parallel A'B'$, значит рассматриваем $\Delta CB'A'$.



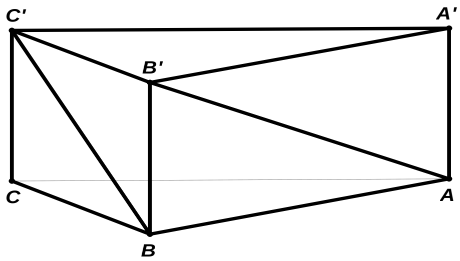
Объясните, почему $CB' = CA' = \sqrt{2}$?

Искомый угол $\angle CB'A'$.

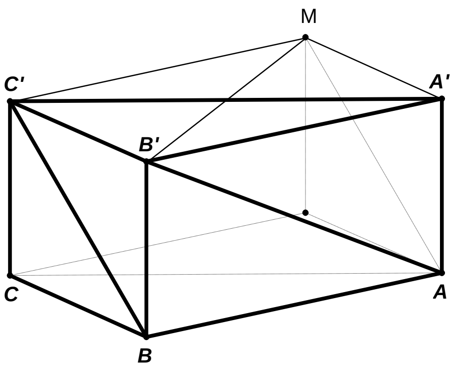
По теореме косинусов найдите косинус этого угла.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

6. В правильной треугольной призме $ABCA'B'C'$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB' и $C'B$.



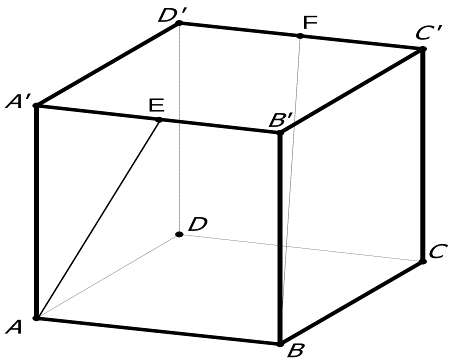
Решение.



По построению $BC' \parallel AM$.
Искомый угол $\angle B'AM$, который находим из $\angle B'AM$,
1. $B'A = AM = \sqrt{2}$
Как найти $B'M$?
По теореме косинусов в $\Delta B'A'M$:
Проверьте, что $B'M = \sqrt{3}$
2. $\Delta B'AM$:
$\left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cos B'AM$
Ответ: $\frac{1}{4}$.

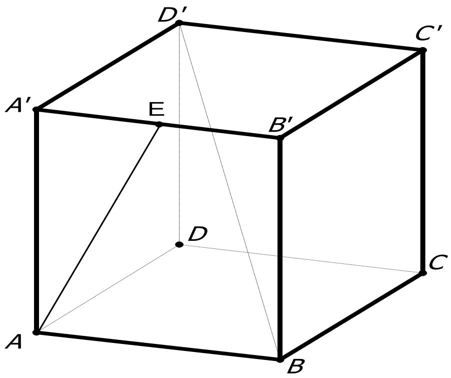
Домашнее задание

1. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ точки E и F — середины ребер соответственно A_1B_1 и C_1D_1. Найдите косинус угла между прямыми AE и BF.



Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

2. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ точка E — середина ребра $A'B'$. Найдите косинус угла между прямыми AE и BD'.



Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

3. $EFGHE_1F_1G_1H_1$ — куб. Точки L, N, T — середины ребер $F_1G_1; G_1H_1$ и H_1H соответственно; K — точка пересечения диагоналей грани EE_1F_1F.

Заполните таблицу расположения прямых и углов между ними.

	Прямые	Расположение	Угол между прямыми
1	LN и EG		
2	F_1T и FH		
3	F_1N и KT		
4	TN и EG		
5	F_1T и KN		
6	KH_1 и LN		

Ответ:

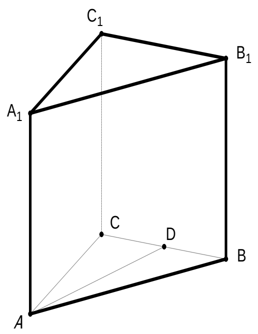
	Прямые	Расположение	Угол между прямыми
1	LN и EG	скрещиваются	90^0

2	F_1T и FH	пересекаются	$arctg\,\frac{\sqrt{2}}{4}$
3	F_1N и KT	параллельны	0^0
4	TN и EG	скрещиваются	60^0
5	F_1T и KN	пресекаются	$\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$
6	KH_1 и LN	скрещиваются	30^0

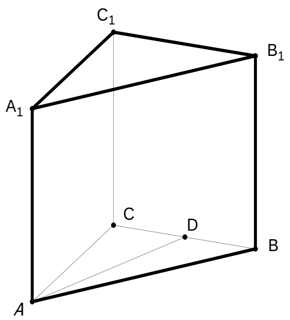
П р и з м ы

Устно

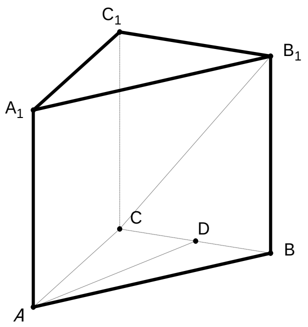
1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точка D — середина ребра BC. Найдите угол между прямыми BB_1 и AD.



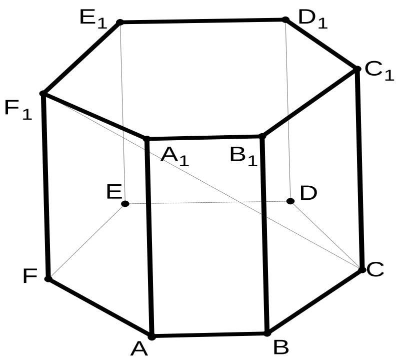
2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точка D — середина ребра BC. Найдите угол между прямыми A_1C_1 и AD.



3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точка D — середина ребра BC. Найдите угол между прямыми CB_1 и AD.

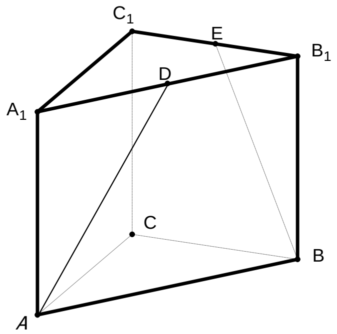


2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямыми AB и CF_1.

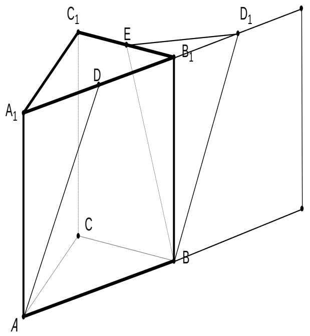


Работа в тетради

1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точки D, E — середины ребер соответственно A_1B_1 и B_1C_1. Найдите косинус угла между прямыми AD и BE.

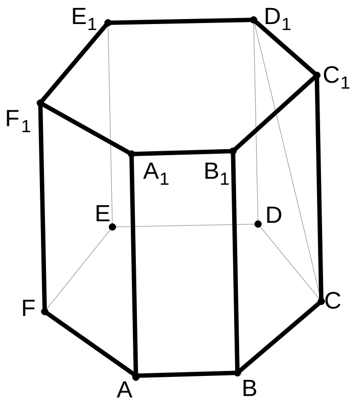


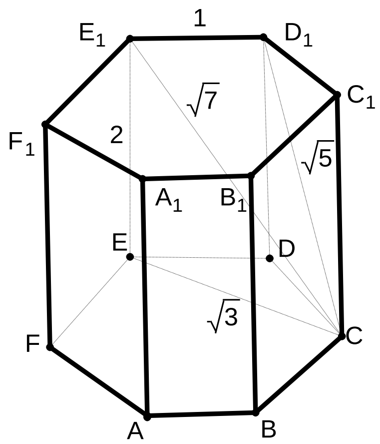
Решение.



Прокомментируйте чертеж.
Искомый угол?
$BE = AD = \frac{\sqrt{5}}{2}$;
$ED_1{}^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos 120^0$
Продолжите решение.
Ответ: 0,7.

2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямыми AB и CD_1.

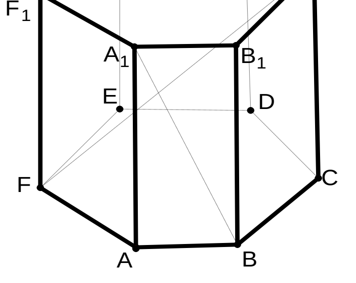




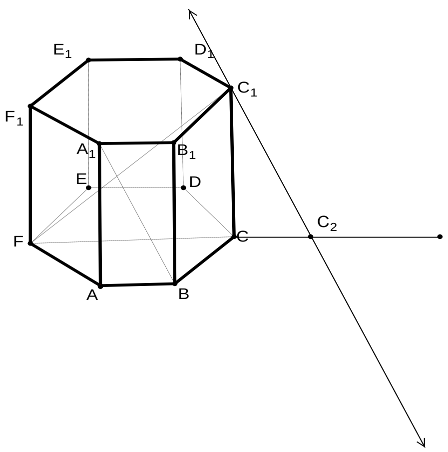
Решение.
Объясните, почему искомый угол E_1D_1C?

Объясните длины отрезков на чертеже.
Найдите искомый угол.

3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми BA_1 и FC_1.

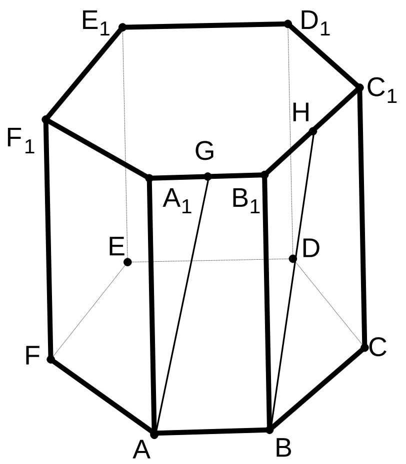


Решение.

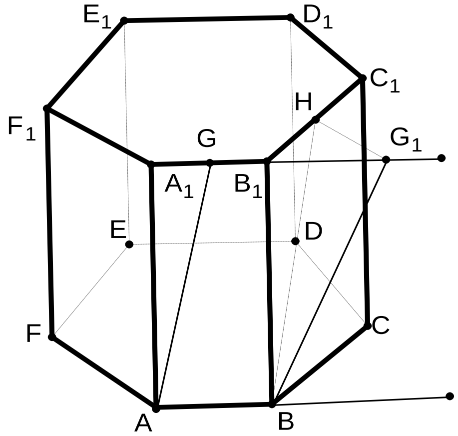


$A_1B \parallel C_1C_2$, искомый угол — $\angle FC_1C_2$. Ответ: $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, точки G и H — середины ребер соответственно A_1B_1 и B_1C_1. Найдите косинус угла между прямыми AG и BH.



Решение.



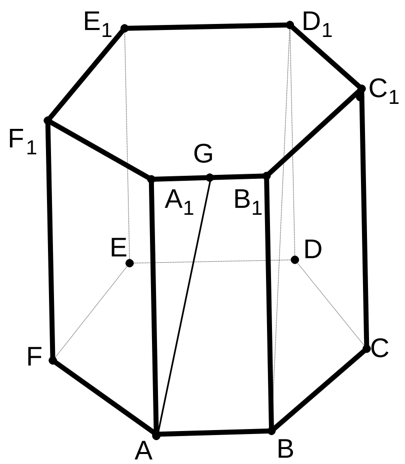
$AG \parallel BG_1$

Искомый угол — HBG_1.

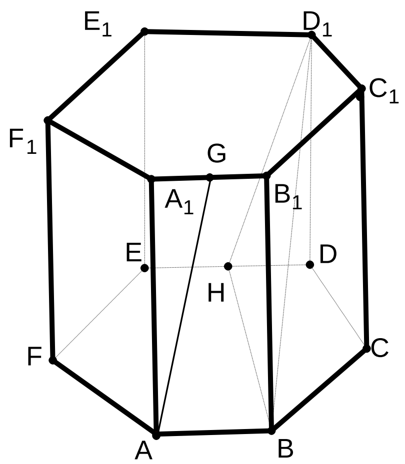
Примените теорему косинусов в ΔHBG_1.

Ответ: 0,9.

5. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, точка G — середина ребра A_1B_1. Найдите косинус угла между прямыми AG и BD_1.



Решение.



Прокомментируйте чертеж. Искомый угол — …

$HD_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}, BD_1 = 2, BH = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

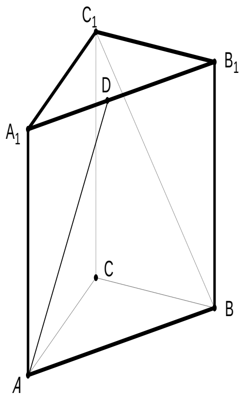
Почему?

Продолжите вычисления для нахождения искомого угла.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

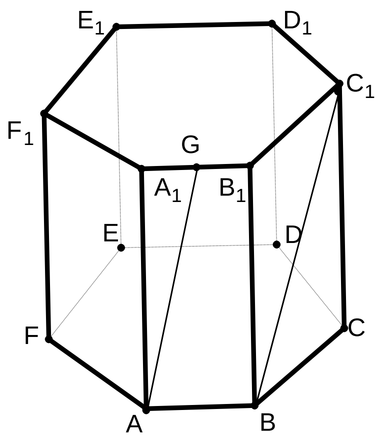
Домашнее задание

1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точка D — середина ребра соответственно A_1B_1. Найдите косинус угла между прямыми AD и BC_1.



Ответ: $\frac{3\sqrt{10}}{20}$.

2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, точка G — середина ребра A_1B_1. Найдите косинус угла между прямыми AG и BD_1.



Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M — середина B_1C_1, точка F — середина D_1C_1, точка K — середина DC, O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Заполните таблицу.

	Прямые	Расположение	Угол между прямыми
1	A_1M и BC		
2	A_1M и BK		
3	C_1K и B_1F		
4	C_1O и AB_1		
5	A_1B и B_1D		

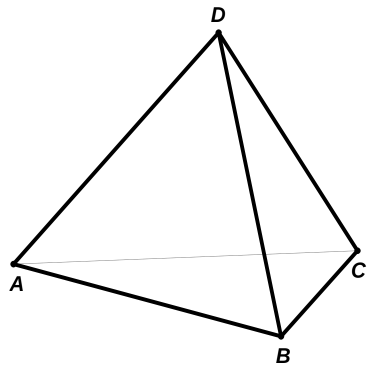
Ответ:

	Прямые	Расположение	Угол между прямыми
1	A_1M и BC	Скрещиваются	$arctg 2$
2	A_1M и BK	Скрещиваются	90^0
3	C_1K и B_1F	Скрещиваются	$2\arcsin\sqrt{0,4}$
4	C_1O и AB_1	Скрещиваются	30^0
5	A_1B и B_1D	Скрещиваются	90^0

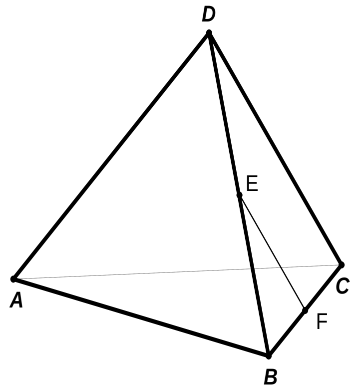
П и р а м и д ы

Устно

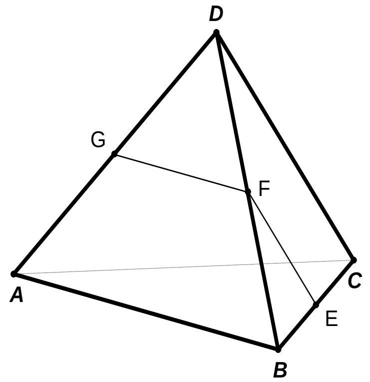
1. В правильном тетраэдре $ABCD$ найдите угол между прямыми AB и CD.



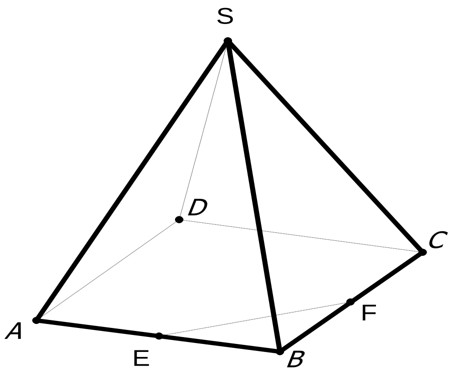
2. В правильном тетраэдре $ABCD$ точки E и F — середины ребер соответственно BC и BD. Найдите угол между прямыми AB и EF.



3. В правильном тетраэдре $ABCD$ точки E, F и G — середины ребер соответственно BC, BD, AD. Найдите угол EFG.

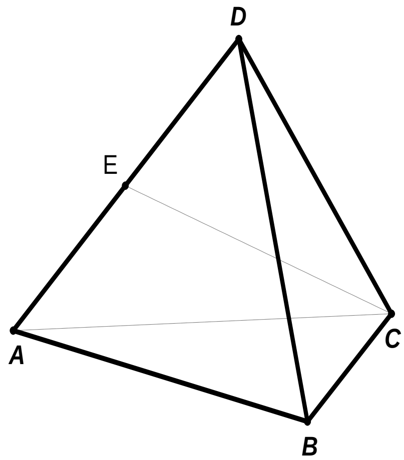


4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точки E и F — середины ребер соответственно AB и BC. Найдите угол между прямыми SA и EF.

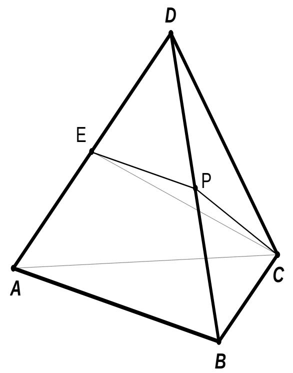


Работа в тетради

1. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка E — середина ребра AD. Найдите косинус угла между прямыми AB и CE.



Решение.



Проведем $PE \parallel AB$, PE — средняя линия ΔADB.

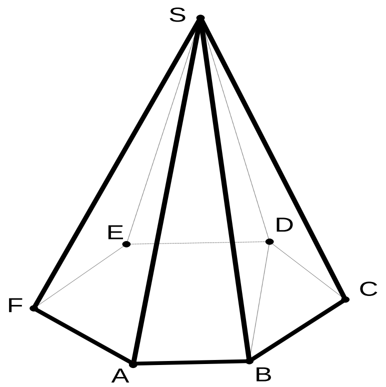
Тогда искомый угол — $\angle PEC$.

Объясните, почему $PC = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $CE = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а $PE = \frac{1}{2}$.

Распишите теорему косинусов в ΔEPC.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

2. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямыми SA и BD.

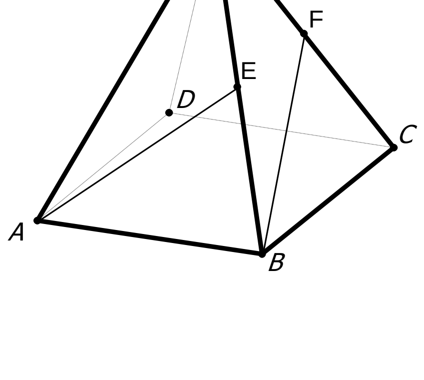


1. Объясните, почему искомый угол — $\angle EAS$?
2. Почему $EA = \sqrt{3}$?
3. Находим искомый угол, используя теорему косинусов в ΔEAS.

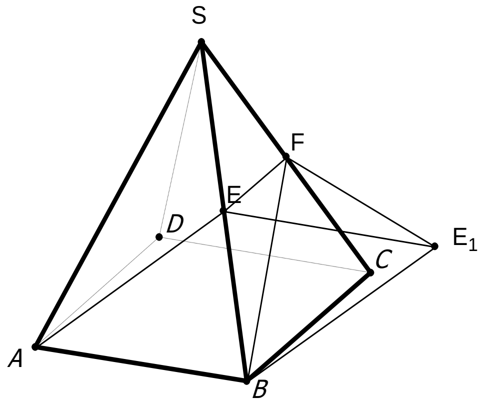
Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Решение.

3. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точки E, F — середины ребер соответственно SB и SC. Найдите косинус угла между прямыми AE и BF.



Решение.



$BF = BE_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

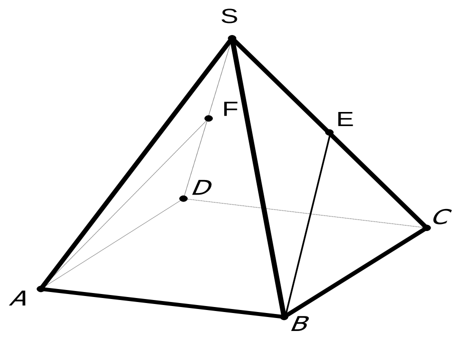
ΔFEE_1 — прямоугольный: $FE_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Примените теорему косинусов в ΔFBE_1.

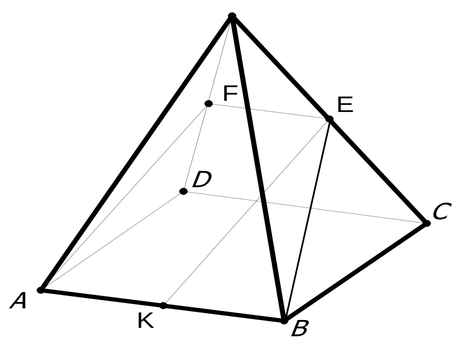
Ответ: $\dfrac{1}{6}$.

Прокомментируйте построение искомого угла FBE_1.

4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точки E, F — середины ребер соответственно SC и SD. Найдите косинус угла между прямыми AF и BE.



Решение.



Ответ: $\dfrac{5}{6}$.

Объясните, почему искомый угол — KEB?

Как его найти?

5. Ребра AD и BC пирамиды $DABC$ равны 24 см и 10 см. Расстояние между серединами ребер BD и AC равно 13 см. Найдите угол между прямыми AD и BC. Ответ: 90^0.

6. Угол между боковыми ребрами правильной четырехугольной пирамиды, не лежащими в одной грани, равен 120^0. Найти плоский угол при вершине пирамиды. Ответ: $\arccos\frac{1}{4}$.

Домашнее задание

1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точки D, E — середины ребер A_1B_1 и B_1C_1. Найти косинус угла между прямыми AD и BE. Ответ: $0{,}7$.

2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точка D — середина ребра A_1B_1. Найти косинус угла между прямыми AD и BC_1. Ответ: $\frac{3\sqrt{10}}{20}$.

3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1. Ответ: 0,75.

4. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, длина стороны основания равна 3, а длина бокового ребра равна 2. Найдите угол между прямыми A_1F и AD_1.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{130}}{52}$.

Подготовка к самостоятельной работе

1. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания $AB=\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1=11$. Найдите угол между прямыми SA и BC. Ответ: 30^0.

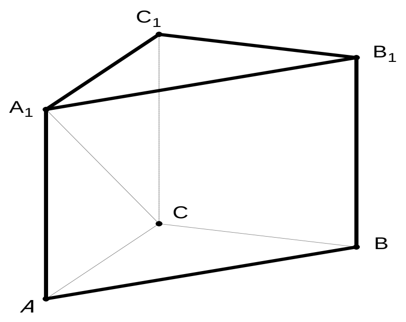
2. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания $AB = 4$, а боковое ребро $AA_1 = 3$. Найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1.

Ответ: $2\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

Самостоятельная работа

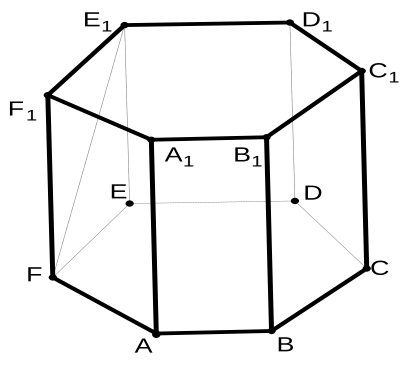
Вариант 1

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB и CA_1.



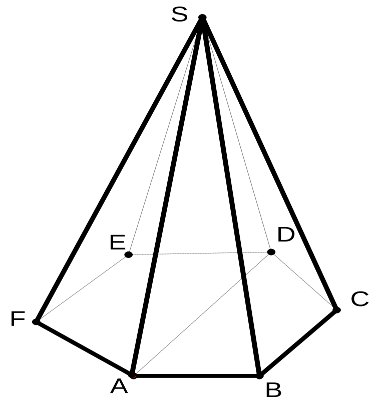
Вариант 2

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB и FE_1.



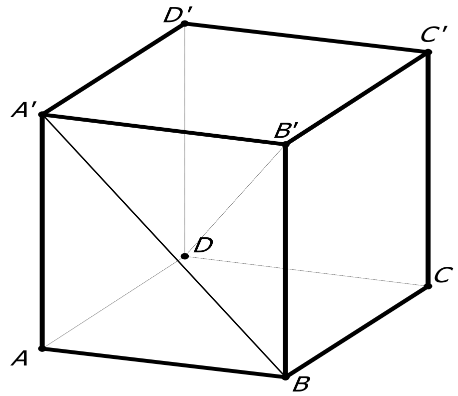
Вариант 3

В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямыми SB и AD.



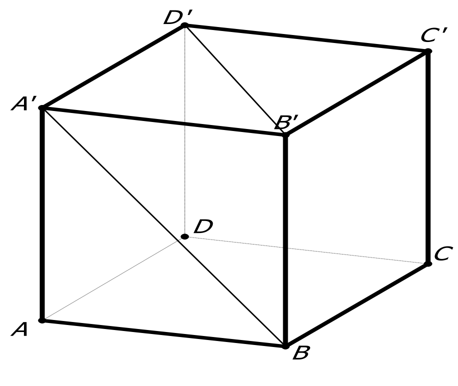
Вариант 4

В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите угол между прямыми $A'B$ и DB'.



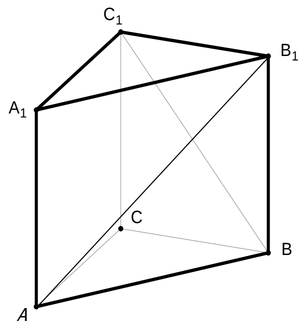
Вариант 5

В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите угол между прямыми $A'B$ и DB'.



Вариант 6

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.

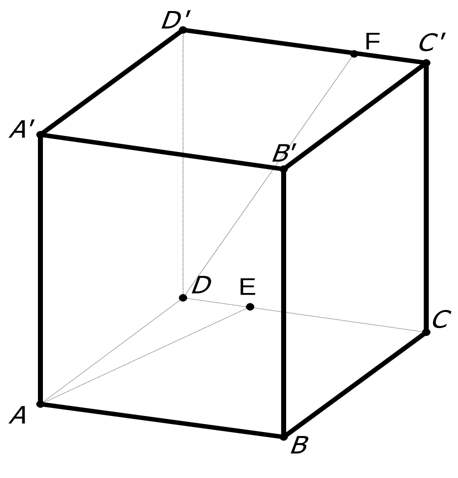


Ответы: 1. $\frac{\sqrt{2}}{4}$; 2. $\frac{\sqrt{2}}{4}$; 3. $\frac{1}{4}$; 4. 90; 5. 60; 6. $\frac{1}{4}$.

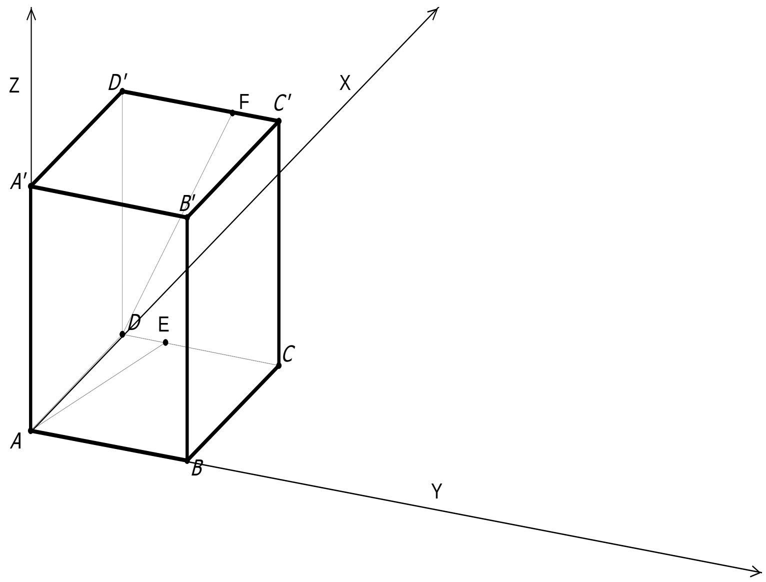
Метод координат

При нахождении угла φ между прямыми m и l используют формулу $\cos\varphi = \frac{|\vec{p}\cdot\vec{q}|}{|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|}$, где векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ параллельны прямым m и l.

1. В единичном кубе $ABCDA'B'C'D'$ найти угол между прямыми AE и DF, где E и F — точки, расположенные на ребрах CD и $C'D'$ так, что $DE = \frac{1}{3}DC, C'F = \frac{1}{3}C'D'$.



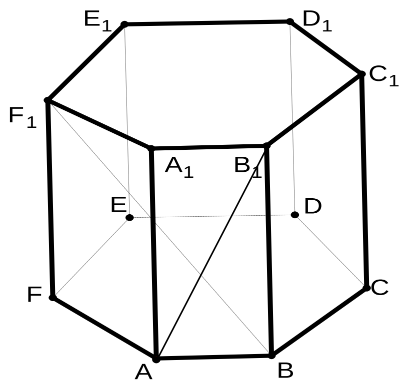
Решение.



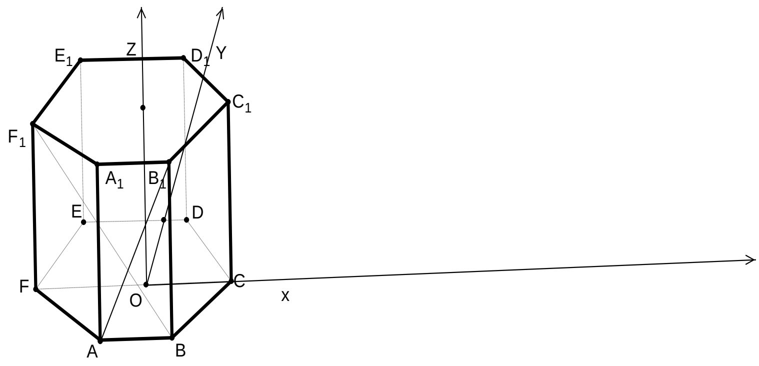
$A(0;0;0)$; $D(1;0;0)$; $E\left(1;\frac{1}{3};0\right)$; $F\left(1;\frac{2}{3};1\right)$; $A\vec{E}\left\{1;\frac{1}{3};0\right\}$ $D\vec{F}\left\{0;\frac{2}{3};1\right\}$

$$\cos\varphi = \frac{\left|1\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + 0\cdot 1\right|}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1^2}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{\sqrt{10}}{3}\cdot\frac{\sqrt{13}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{130}}$$

2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, ребра которой равны 1, найти угол между прямыми AB_1 и BF_1.



Решение.



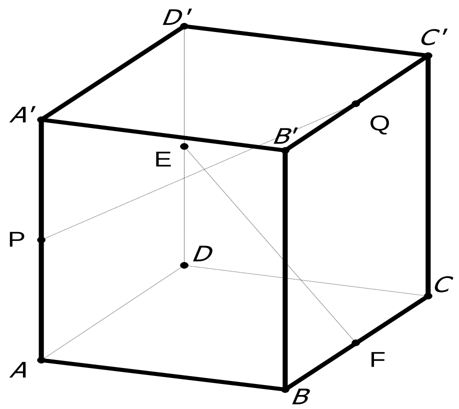
$$A\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right),\ B_1\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)\ \Rightarrow \vec{AB_1}\{1;0;1\}$$

$$B\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right),\ F_1(-1;0;1)\ \Rightarrow\ \vec{BF_1}\left\{-\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right\};$$

$$\cos\varphi=\frac{\left|-\frac{3}{2}+1\right|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}+1}}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}\cdot 2}=\frac{1}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

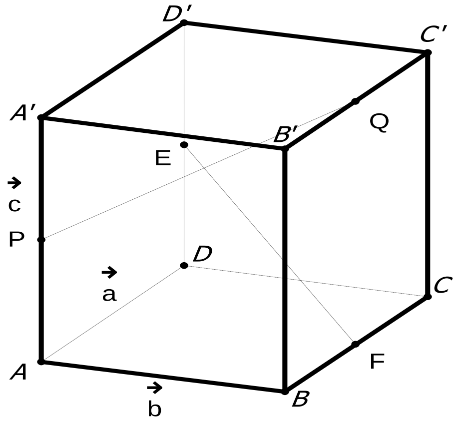
Векторный метод

1. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найти угол между прямыми EF и PQ, где E,F,P,Q — середины ребер DD', BC, AA' и $B'C'$ соответственно.



Решение.

Введем единичные векторы:



$$\vec{EF}=\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{DF}=\frac{1}{2}\vec{c}-\left(\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\vec{PQ}=-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\vec{EF}\cdot\vec{PQ}=\frac{1}{4}\vec{a}^{2}-\vec{b}^{2}+\frac{1}{4}\vec{c}^{2}=\frac{1}{4}-1+\frac{1}{4}=-\frac{1}{2};\ \cos\varphi=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}=\frac{1}{3}$$

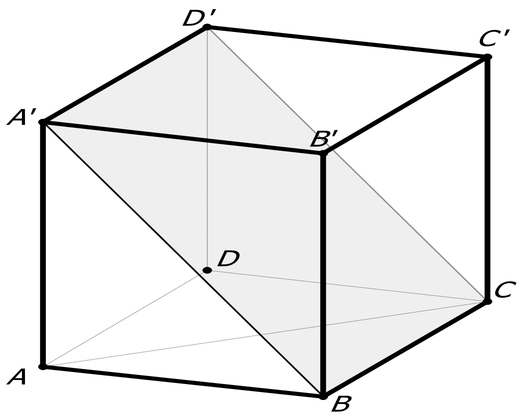
Угол между прямой и плоскостью

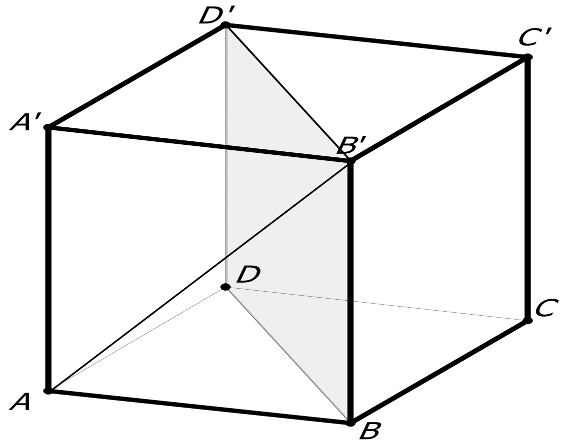
Определение. Углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и проекцией этой прямой на плоскость.

Устно

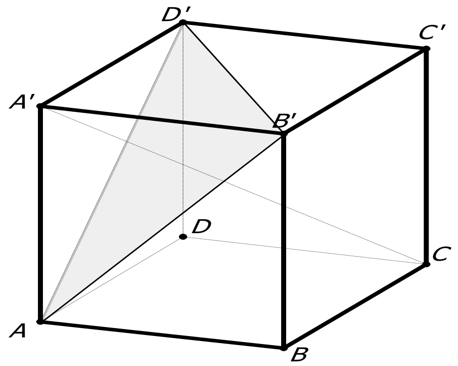
1. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите угол между прямой AC и плоскостью BCD' (30^0).

2. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите угол между прямой AB' и плоскостью BDD' (30^0).

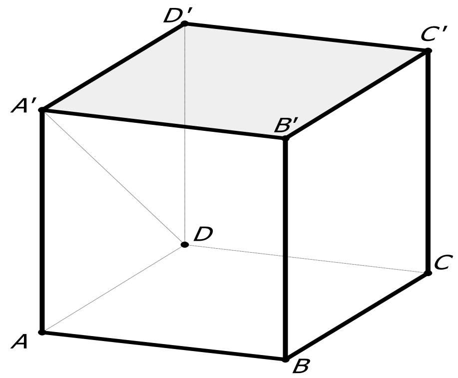




3. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите угол между прямой CA' и плоскостью $AB'D'$ (90^0).

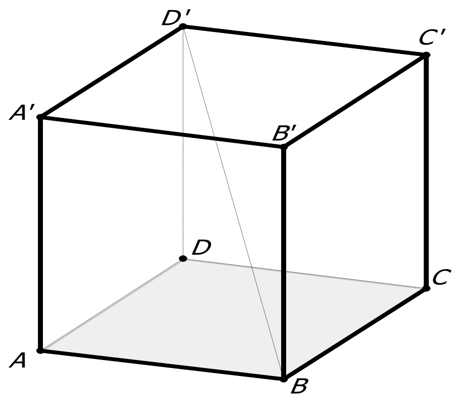


4. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите угол между прямой $D'A'$ и плоскостью $A'B'C'$ (45^0).



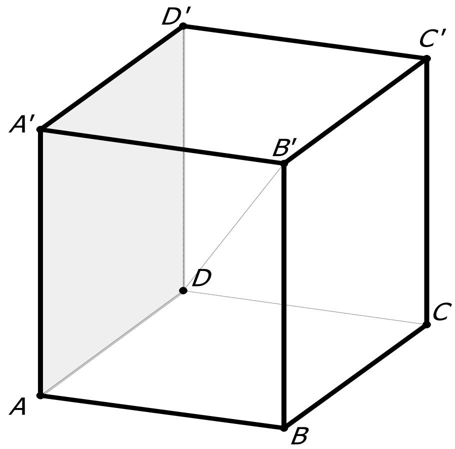
Работа в тетради

1. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите синус угла между прямой BD' и плоскостью ABC.



Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите косинус угла между прямой DB' и плоскостью ADD'.



Решение.
Общая точка плоскости и прямой – точка …

Значит, из точки … опускаем перпендикуляр на плоскость ADD'.

Рассматриваем Δ …

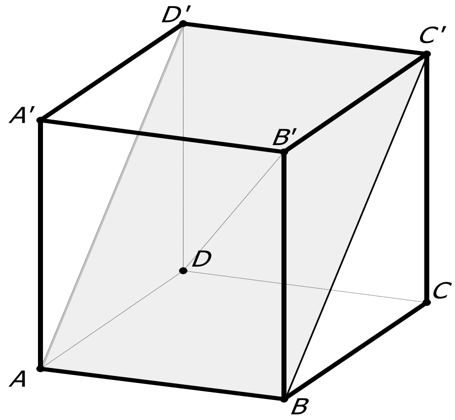
Косинус угла в прямоугольном треугольнике есть отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Прилежащий катет равен …

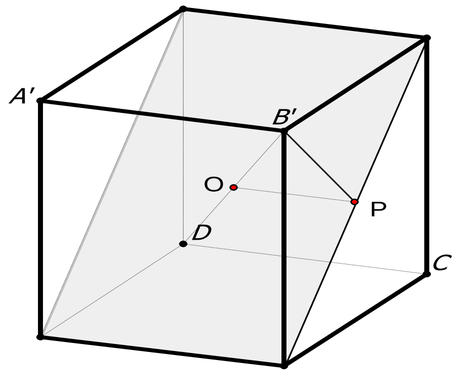
Гипотенуза равна …

Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

3. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите тангенс угла между прямой DB' и плоскостью ABC'.



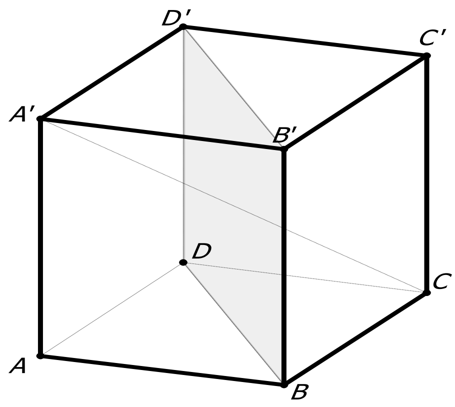
Решение.



$DB' \cap ABC' = O$
$B'P \perp ABC'$
$\Delta OB'P : \angle P = 90^0$, $\angle B'OP$ — искомый.
Объясните, почему

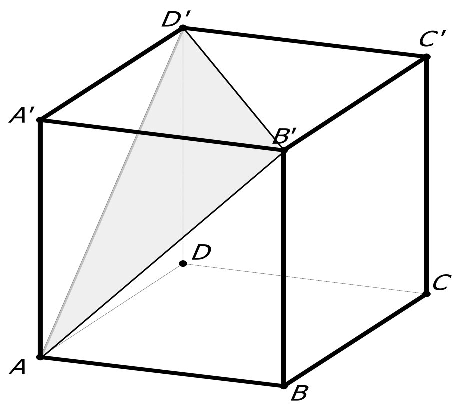
$$tgB'OP = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

4. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите тангенс угла между прямой CA' и плоскостью BDD'.



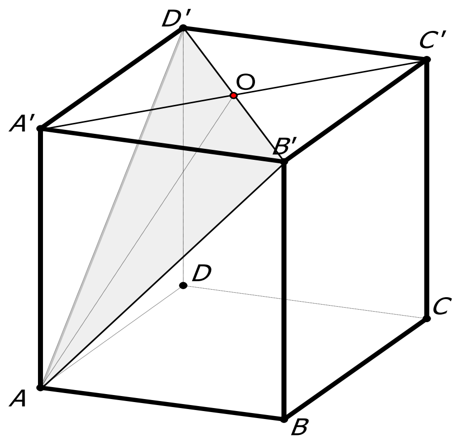
Ответ: $\sqrt{2}$.

5. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите синус угла между прямой CC' и плоскостью $AB'D'$.



Решение.

Будем искать угол между прямой AA' и плоскостью $AB'D'$, так как $CC' \parallel AA'$.



Треугольник $A'AO$ — прямоугольный.

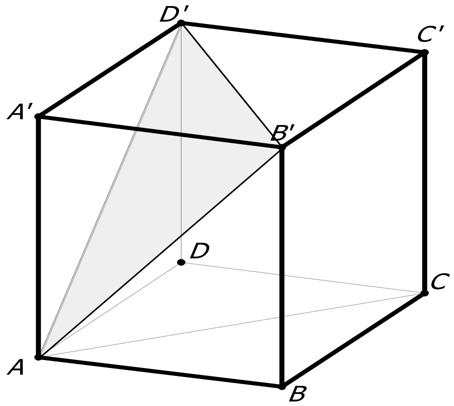
$$\sin A'AO = \frac{A'O}{AO} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Объясните, почему так.

Искомый угол — $A'AO$, точка O — точка пересечения диагоналей квадрата.

6. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите синус угла между прямой AC и плоскостью $AB'D'$.

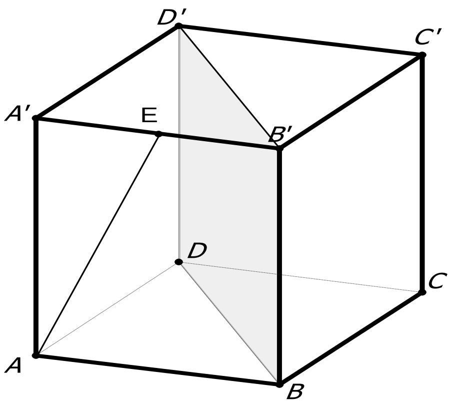
Решение.



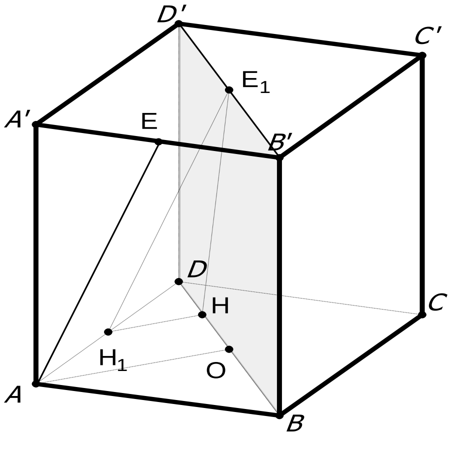
Покажите треугольник, в котором будем находить угол. Можно использовать теорему косинусов для нахождения косинуса угла, а синус угла можно найти по основному тригонометрическому тождеству.

Проверьте ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

7. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ точка E — середина ребра $A'B'$. Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью BDD'.



Решение.



Прокомментируйте чертеж.

Искомый угол — …?

Прокомментируйте:

$$\sin\alpha = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Домашнее задание

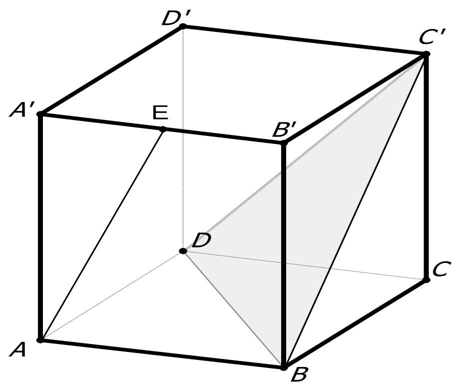
1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите синус угла между прямой C_1D_1 и плоскостью ACB_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите синус угла между прямой CA_1 и плоскостью ACB_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

3. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ точка E — середина ребра $A'B'$. Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью BDC'.

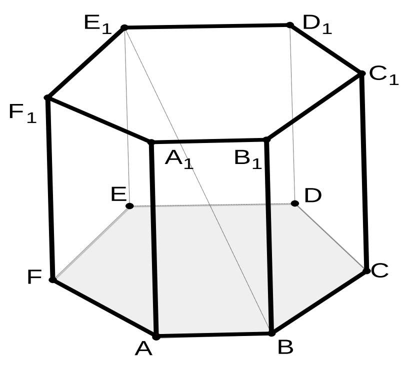


Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{15}$.

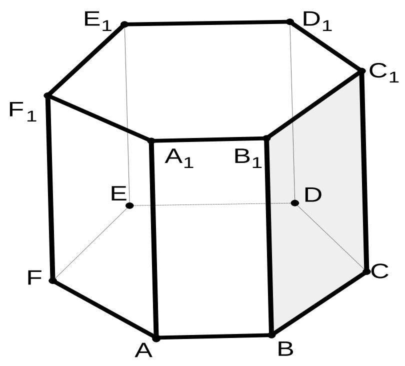
П р и з м ы

Устно

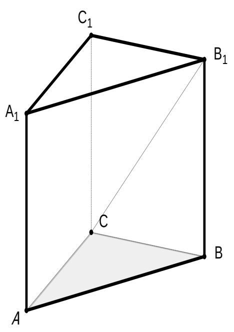
1. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямой BE_1 и плоскостью ABC (0,5).



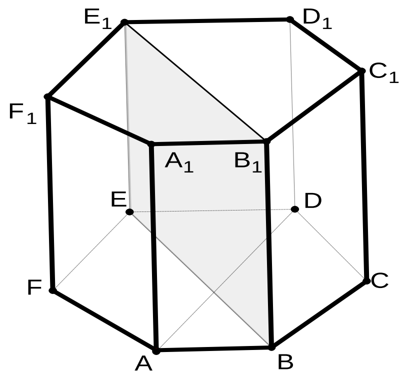
2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB и плоскостью BCC_1 (60^0).



3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой CB_1 и плоскостью ABC (45^0).

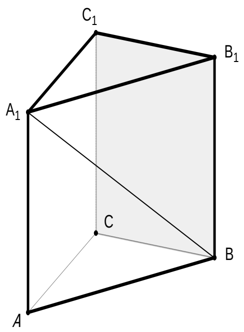


4. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AD и плоскостью BEE_1 (60^0).

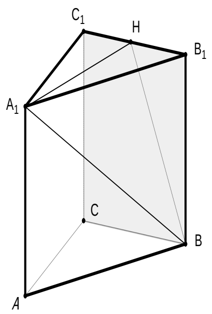


Работа в тетради

1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой BA_1 и плоскостью BCC_1.



Решение.



Треугольник A_1HB — прямоугольный. Искомый угол A_1BH .

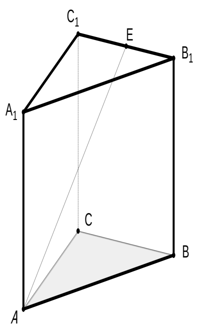
$\sin A_1BH = \frac{A_1H}{A_1B}$

Найдите A_1H и A_1B .

Проверьте ответ: $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

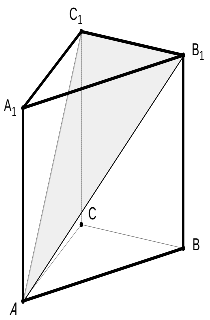
Объясните расположение точки H .

2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точка E — середина ребра B_1C_1. Найдите тангенс угла между прямой AE и плоскостью ABC .



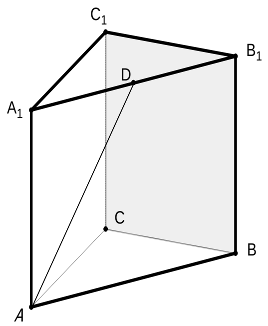
Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямой AA_1 и плоскостью AB_1C_1.

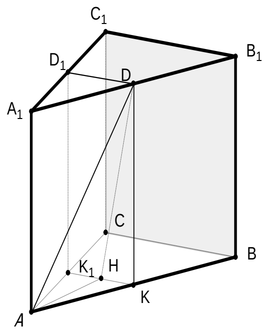


Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точка D — середина ребра A_1B_1. Найдите синус угла между прямой AD и плоскостью BCC_1.



Решение.



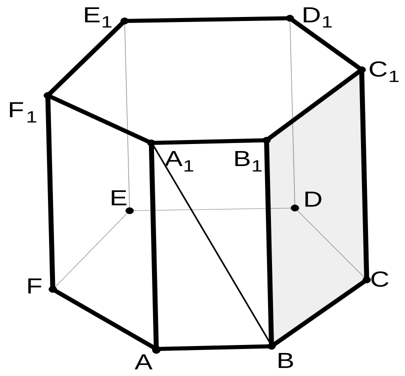
Прокомментируйте чертеж.

Искомый угол …?

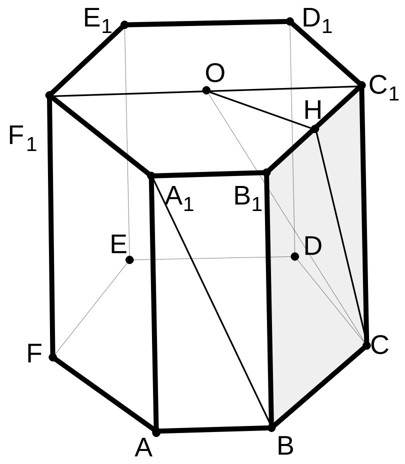
Выполните вычисления.

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{10}$.

5. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой BA_1 и плоскостью BCC_1.



Решение.

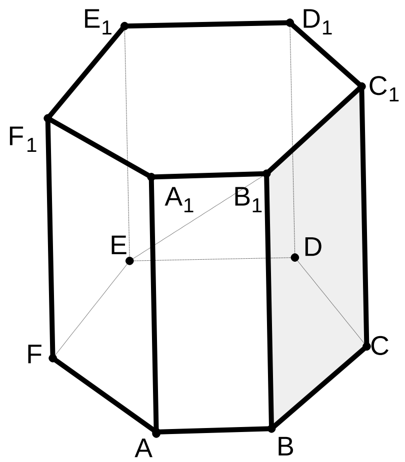


Искомый угол — HCO.

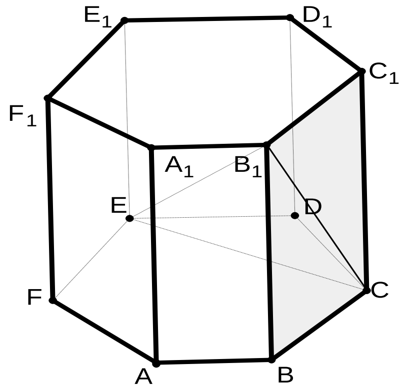
Почему?

$$\sin HCO = \frac{OH}{OC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

6. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой B_1E и плоскостью BCC_1.



Решение.

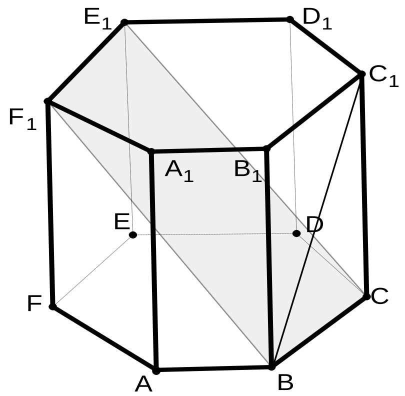


Искомый угол EB_1C. Почему? Почему ΔEB_1C — прямоугольный?

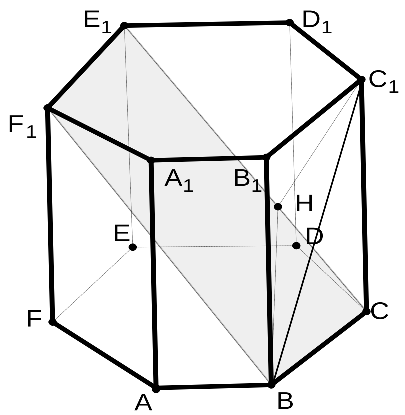
$$\sin EB_1C = \frac{EC}{EB_1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

Поясните.

7. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой BC_1 и плоскостью BCE_1.



Решение.



Проведите решение самостоятельно.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

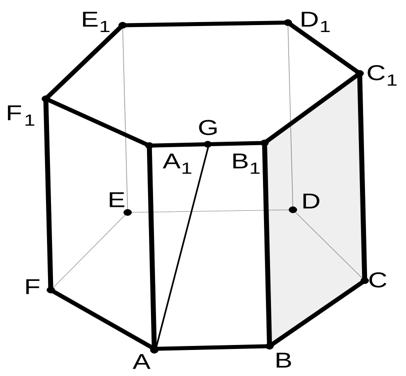
Домашнее задание

1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой A_1B_1 и плоскостью AB_1C_1. Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямой FC_1 и плоскостью BCE_1.

Ответ: $\frac{3}{5}$.

3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF...F_1$, все ребра которой равны 1, точка G — середина ребра A_1B_1. Найдите синус угла между прямой AG и плоскостью BCC_1.

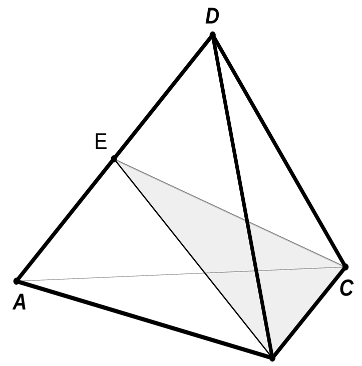


Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{10}$.

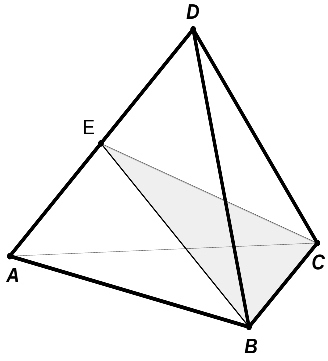
П и р а м и д ы

Устно

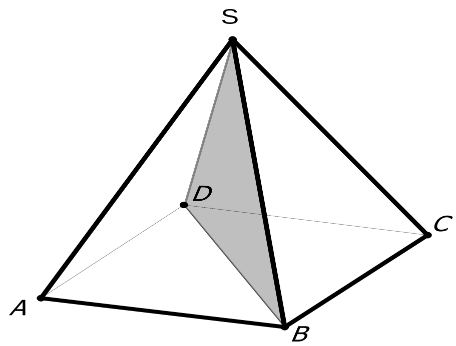
1. В тетраэдре $ABCD$, все ребра которого равны 1, точка E — середина ребра AD. Найдите угол между прямой AD и плоскостью BCE (90^0).



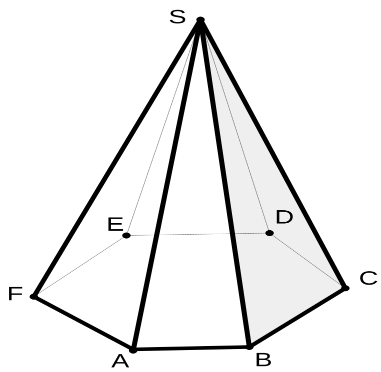
2. В тетраэдре $ABCD$, все ребра которого равны 1, точка E — середина ребра AD. Найдите угол между прямой AB и плоскостью BCE (30^0).



3. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой SA и плоскостью SBD (45^0).

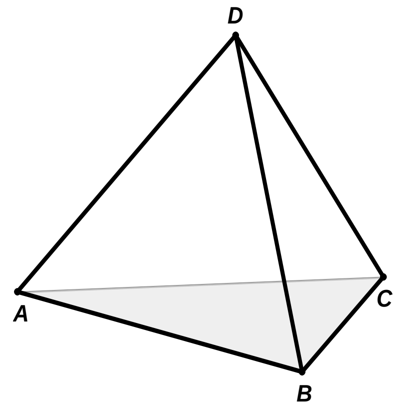


4. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, SH — высота. Найдите тангенс угла между прямой SH и плоскостью SBC (0,5).

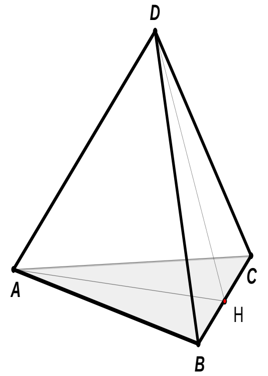


Работа в тетради

1. В правильном тетраэдре $ABCD$ найдите косинус угла между прямой AD и плоскостью ABC.



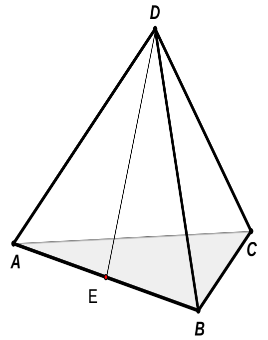
Решение.



Искомый угол DAH. Почему? Найдем $\cos DAH$ по теореме косинусов.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

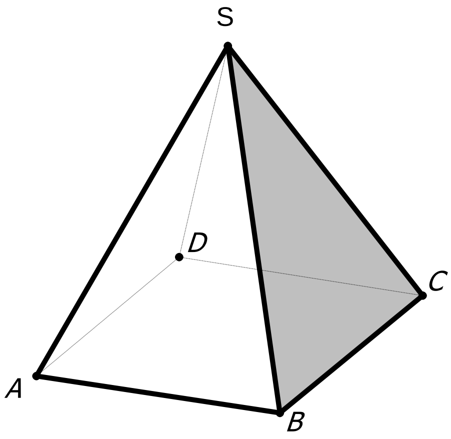
2. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка E — середина ребра AB. Найдите косинус угла между прямой DE и плоскостью ABC.



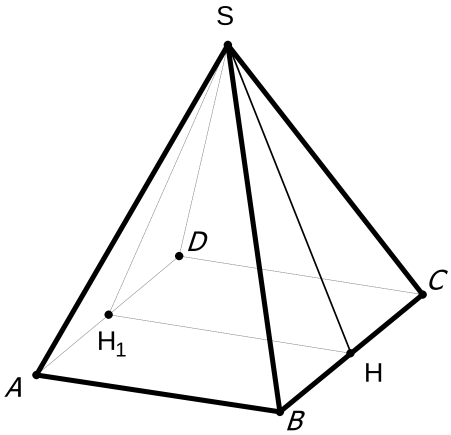
Подсказка: рассматриваем треугольник DEC.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

3. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямой AB и плоскостью SBC.



Решение.

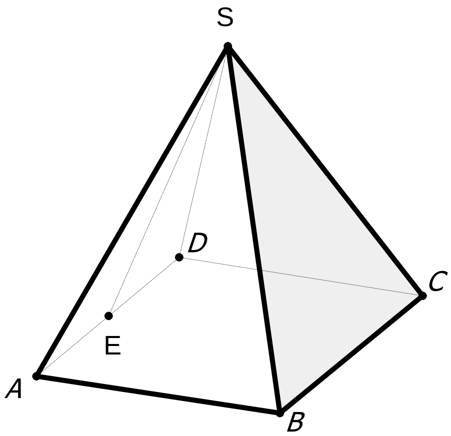


Искомый угол — SHH_1. Почему?

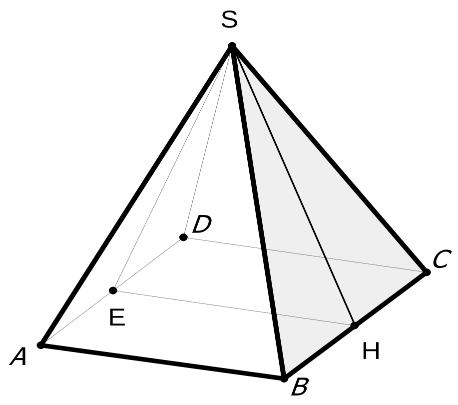
Используем теорему косинусов в треугольнике SHH_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точка E — середина ребра AD. Найдите косинус угла между прямой SE и плоскостью SBC.



Решение.

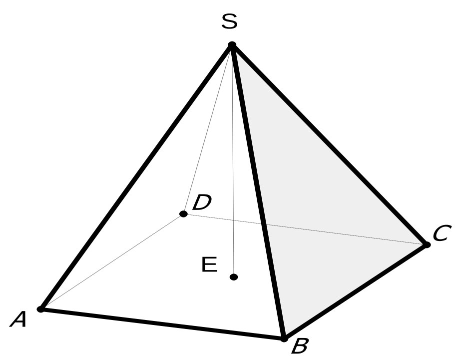


Искомый угол — ESH. Почему?

Далее предложите способ решения.

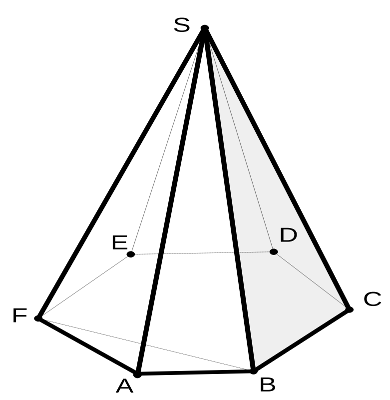
Ответ: $\frac{1}{3}$.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, SE — высота. Найдите синус угла между прямой SE и плоскостью SBC.

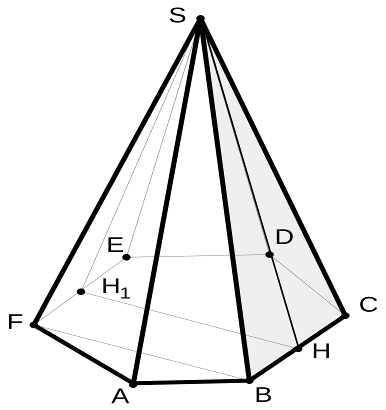


Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямой BF и плоскостью SBC.



Решение.



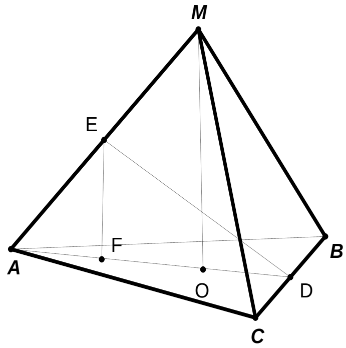
Искомый угол — H_1HS. Почему?

Объясните, почему $HH_1 = \sqrt{3}$;

$SH = SH_1 = \frac{\sqrt{15}}{2}$.

$\cos H_1HS = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

7. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC известны ребра $AB = 7\sqrt{3}$, $MC = 25$. Найти угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины ребер AM и BC.



Решение.ъ

Пусть D и E — середины ребер CB и AM соответственно. Так как пирамида правильная, то $AD \perp CB, MD \perp CB,$ $AO = \dfrac{AB}{\sqrt{3}} = 7$, $OD = \dfrac{AO}{2} = \dfrac{7}{2}$,

$FD = FO + OD = 7$

$MO = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$, $EF = 12$; $tgEDF = \dfrac{EF}{FD} = \dfrac{12}{7}$. Ответ: $arctg\dfrac{12}{7}$.

Домашнее задание

1. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой AC и плоскостью SBC.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

2. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка E — точка пересечения медиан треугольника BCD. Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью ABC.

Ответ: $\dfrac{1}{3}$.

3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC сторона основания равна $6\sqrt{3}$, а боковое ребро равно 10. Найдите угол между плоскостью ABC и прямой MN, где точка N — середина ребра $AC,$ а точка M делит ребро BS так, что $BM : MS = 2:1$.

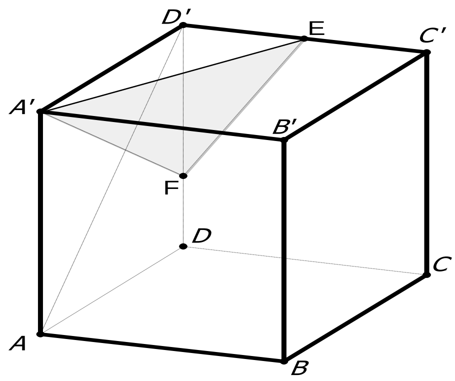
Ответ: $arctg\dfrac{16}{15}$.

4. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра $AB = 20\sqrt{3}$, $SC = 29$. Найти угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины ребер AS и BC. Ответ: $arctg\,\frac{21}{40}$.

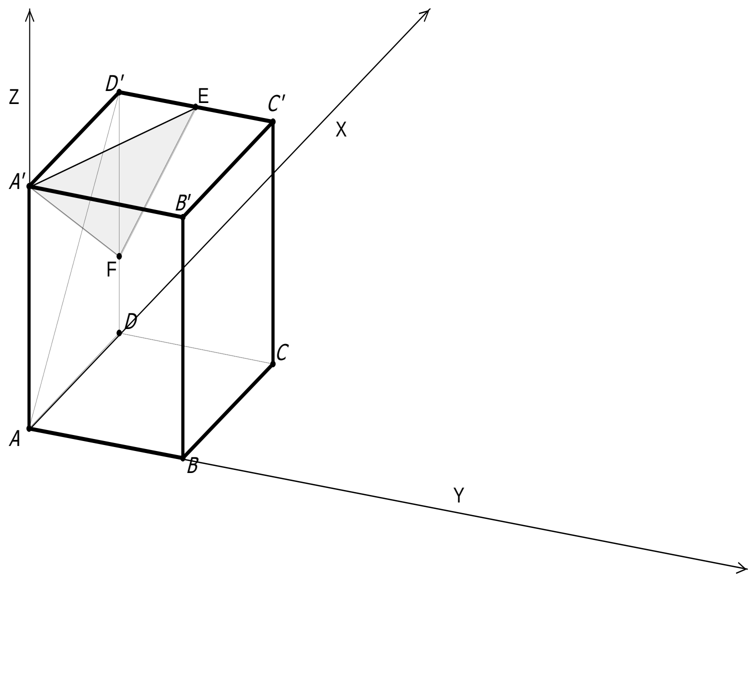
Метод координат

Угол между прямой l и плоскостью α можно вычислить по формуле $\sin\varphi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{p}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{p}|}$, где $\vec{n}$ — вектор нормали плоскости α, а вектор $\vec{p}$ — направляющий вектор прямой l.

1. В единичном кубе $ABCDA'B'C'D'$ найти угол между прямой AD' и плоскостью α, проходящей через точки A', E, F, где точка E — середина ребра $C'D'$, а точка F лежит на ребре DD' так, что $D'F = 2DF$.



Решение.



$A(0;0;0)$; $D'(1;0;1)$; $\vec{AD'}(1;0;1)$ — направляющий вектор прямой AD'

$A'(0;0;1), E\left(1;\frac{1}{2};1\right), F\left(1;0;\frac{1}{3}\right)$

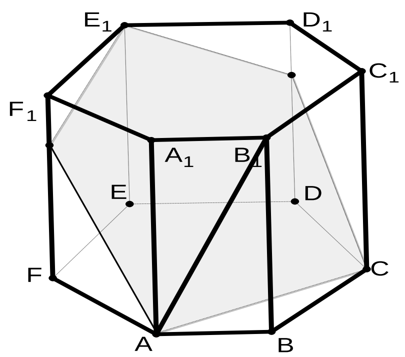
$\alpha : ax+by+cz+d=0$

$$\begin{cases} c+d=0, \\ a+\frac{1}{2}b+c+d=0, \\ a+\frac{1}{3}c+d=0 \end{cases} \quad \begin{cases} c=-d, \\ a=-\frac{2}{3}d, \\ b=\frac{4}{3}d; \end{cases} \quad -\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}y-z+1=0 \text{ или } 2x-4y+3z-3=0$$

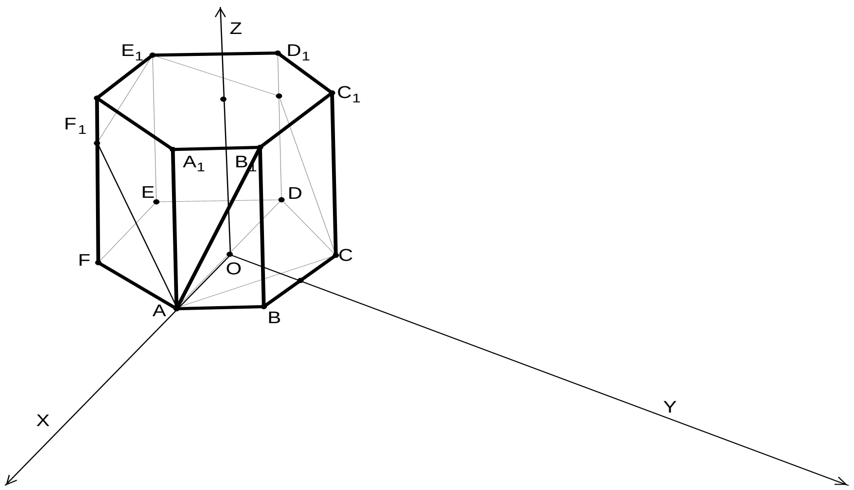
Тогда вектор нормали $\vec{n}(2;-4;3)$; $\sin\varphi=\frac{|2\cdot1+3\cdot1|}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{2^2+4^2+3^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{29}}=\frac{5}{\sqrt{58}}$

Ответ: $\arcsin\frac{5}{\sqrt{58}}$.

2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1...F_1$, ребра которой равны 1, найти угол между прямой AB_1 и плоскостью ACE_1.



Решение.



$A(1;0;0), B_1\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$, тогда $\vec{AB_1}\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$. Составим уравнение плоскости ACE_1

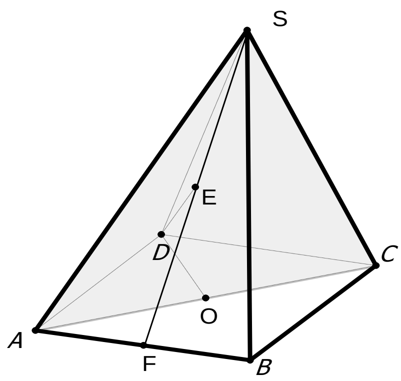
$A(1;0;0), C\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right), E_1\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$; ACE_1: $ax+by+cz+d=0$

$$\begin{cases} a+d=0, \\ -\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b+d=0, \\ -\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b+c+d=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-d, \\ b=-\sqrt{3}d, \\ c=-3d \end{cases} \quad x+\sqrt{3}y+3z-1=0,\ \vec{n}\left(1;\sqrt{3};3\right)$$

$\sin\varphi=\frac{4}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{26}}{13}$. Ответ: $\arcsin\frac{2\sqrt{26}}{13}$.

Векторный метод

3. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найти угол между прямой DE, где E — середина апофемы SF грани ASB, и плоскостью ASC.



Решение.

Вектор $\vec{OD}$ — вектор нормали плоскости ASC.

Пусть $\vec{AD}=\vec{a}, \vec{AB}=\vec{b}, \vec{AS}=\vec{c}$, где $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1, \vec{a}\cdot\vec{b}=0$,

$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{a}|^2\cos 60^0=0{,}5.$

$$\vec{OD}=\vec{OA}+\vec{AD}=-\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{a}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right),$$

$$\vec{DE}=\vec{DA}+\vec{AF}+\vec{FE}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\left(\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)=-\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\vec{DE}\cdot\vec{OD}=\left(-\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)=-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{8}b^2+\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{c}-\frac{1}{4}\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

$$|\vec{DE}| = \sqrt{\left(-\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \frac{1}{16}\vec{b}^2 + \frac{1}{4}\vec{c}^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{c} + 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}} =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{15}{16}}$$

$$|\vec{OD}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}};\ \sin\varphi = \frac{|\vec{DE}\cdot\vec{OD}|}{|\vec{DE}|\cdot|\vec{OD}|}.$$

$\sin\varphi = \frac{3}{8}\cdot\frac{4}{\sqrt{15}}\cdot\sqrt{2} = \frac{3}{\sqrt{30}}$. Ответ: $\arcsin\frac{3}{\sqrt{30}}$.

Подготовка к самостоятельной работе

1. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания $AB = 4\sqrt{3}$, а боковое ребро $SA = 5.$ Найдите угол между прямой SC и плоскостью SAB.

Ответ: $arctg\,\frac{4}{3} + arctg\,\frac{2}{3}$.

2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB = 2\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 4$. Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BCA_1. Ответ: $\arccos\frac{12\sqrt{7}}{35}$.

3. В кубе $ABCD...D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1. Ответ: 30^0.

4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4, BC = 6, CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостью ABC и прямой EF, проходящей через середины ребер AA_1 и C_1D_1. Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M — середина B_1C_1, точка F — середина D_1C_1, точка K — середина DC, O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$.

Заполните таблицу

	Прямая и плоскость	Величина угла
1	AB_1 и ABC	
2	AC и AA_1B	

3	MF и DD_1C	
4	MF и DD_1B	
5	AM и ABC	
6	AC и MKF	
7	AK и MKF	
8	AC_1 и BCC_1	
9	C_1D и ACC_1	
10	B_1D и ACC_1	
11	AA_1 и AMF	
12	DD_1 и AMF	

Ответ:

	Прямая и плоскость	Величина угла
1	AB_1 и ABC	45^0
2	AC и AA_1B	45^0
3	MF и DD_1C	45^0
4	MF и DD_1B	0^0
5	AM и ABC	$arctg\,\frac{2\sqrt{5}}{5}$
6	AC и MKF	90^0
7	AK и MKF	$arctg\,3$
8	AC_1 и BCC_1	$arctg\,\frac{\sqrt{2}}{2}$
9	C_1D и ACC_1	30^0
10	B_1D и ACC_1	$arctg\,\sqrt{2}$
11	AA_1 и AMF	$arctg\,\frac{3\sqrt{2}}{4}$
12	DD_1 и AMF	$arctg\,\frac{3\sqrt{2}}{4}$

6. O — точка пересечения медиан правильного треугольника ABC. MO — перпендикуляр к плоскости ABC; $MA = AB = a; K$ — середина $BC; P$ — точка пересечения медиан треугольника MBC. Заполните таблицу.

	Прямая и плоскость	Измеряемый плоский угол	Величина угла
1	MC и ABC		
2	MK и ABC		
3	CB и AMK		
4	CA и AMK		
5	OC и AMK		
6	CM и AMK		
7	PB и AMK		
8	AP и MBC		
9	OM и MBC		
10	AK и MBC		
11	MB и ACP		
12	BC и ACP		

Ответ:

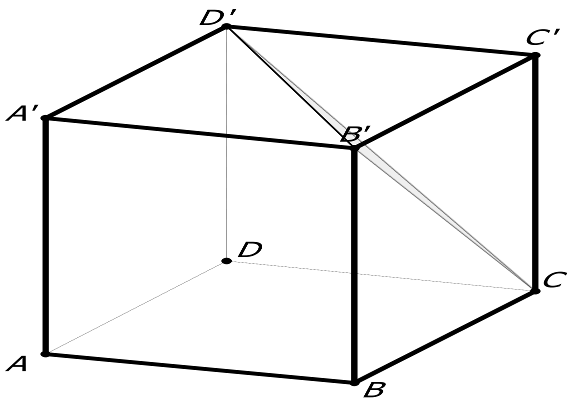
	Прямая и плоскость	Измеряемый плоский угол	Величина угла
1	MC и ABC	$\angle MCO$	$\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$
2	MK и ABC	$\angle MKO$	$\arccos\frac{1}{3}$
3	CB и AMK	-	90^0
4	CA и AMK	$\angle CAK$	30^0
5	OC и AMK	$\angle COK$	60^0
6	CM и AMK	$\angle CMK$	30^0
7	PB и AMK	$\angle BPK$	60^0
8	AP и MBC	-	90^0

9	OM и MBC	$\angle OMK$	$\arcsin\frac{1}{3}$
10	AK и MBC	$\angle MKA$	$\arccos\frac{1}{3}$
11	MB и ACP	-	90^0
12	BC и ACP	$\angle BCP$	30^0

Самостоятельная работа

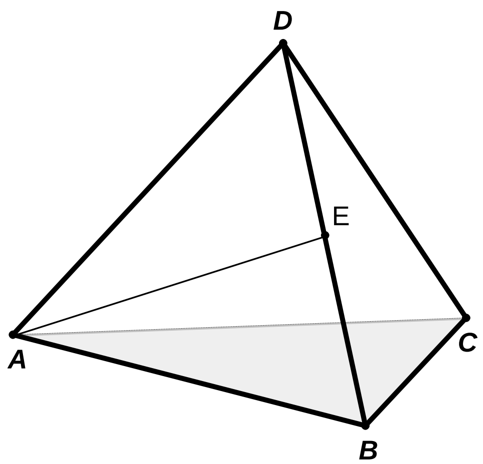
В а р и а н т 1

В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите синус угла между прямой AB и плоскостью $CB'D'$.



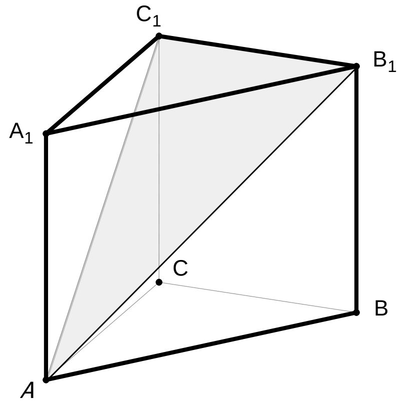
В а р и а н т 2

В правильном тетраэдре $ABCD$ точка E — середина ребра BD. Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью ABC.



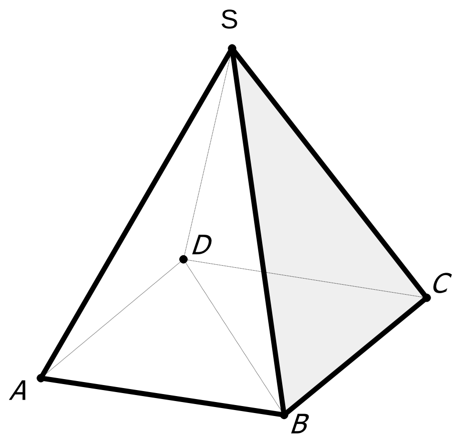
В а р и а н т 3

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямой BB_1 и плоскостью AB_1C_1.



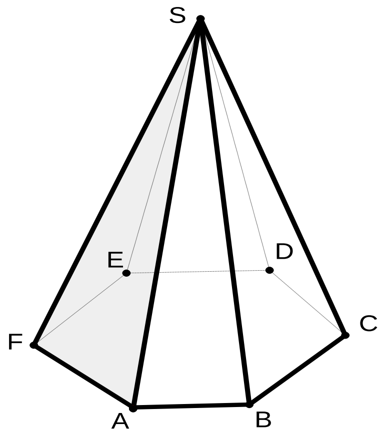
В а р и а н т 4

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой BD и плоскостью SBC.



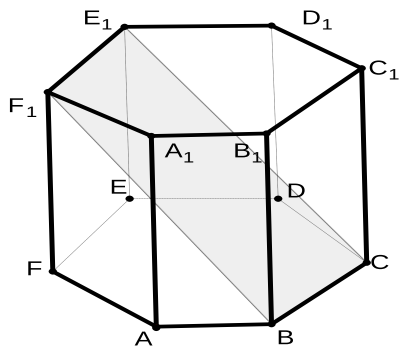
В а р и а н т 5

В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите синус угла между прямой BC и плоскостью SAF.



В а р и а н т 6

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью BCE_1.



Ответы: 1. $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2. $\frac{\sqrt{2}}{3}$; 3.$\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4. $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 5. $\frac{\sqrt{15}}{5}$; 6. 60.

Угол между плоскостями в пространстве

Определение 1. Двугранным углом в пространстве называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей граничной прямой.

Определение 2. Линейным углом двугранного угла называется угол, образованный лучами с вершиной на граничной прямой, стороны которого лежат на гранях двугранного угла и перпендикулярны граничной прямой.

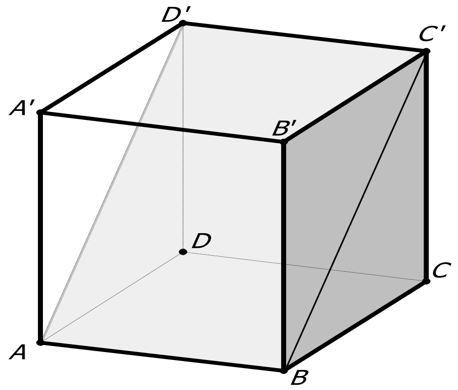
Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.

Определение 3. Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется наименьший из двугранных углов, образованных этими плоскостями.

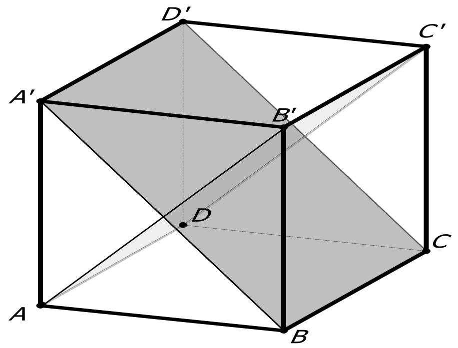
К у б

Устно

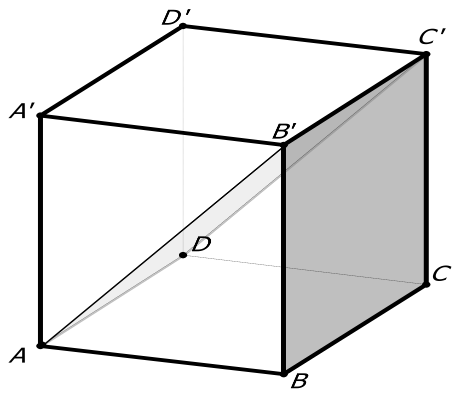
1. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите угол между плоскостями ABC' и BCC'.



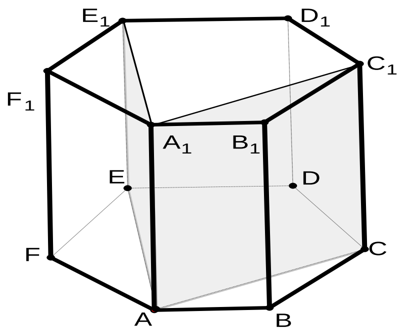
2. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите угол между плоскостями $AB'C'$ и BCD'.



3. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите угол между плоскостями $AB'C'$ и BCC'.

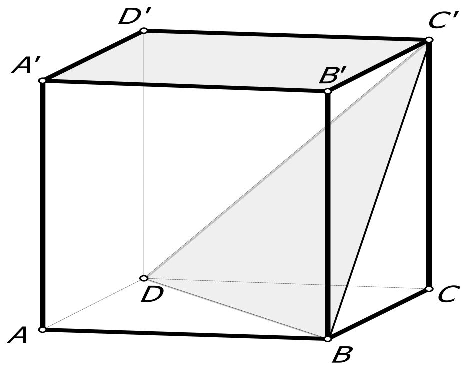


4. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1...F_1$ найдите угол между плоскостями ACC_1 и AEE_1.

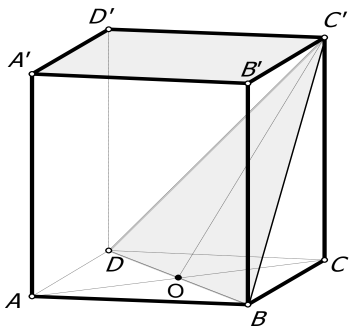


Работа в тетради

1. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите тангенс угла между плоскостями $A'B'C'$ и BDC'.



Решение.



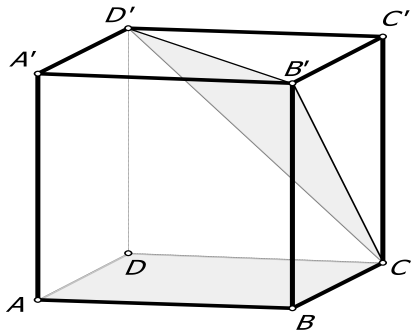
Искомый угол $C'OC$.

Объясните почему.

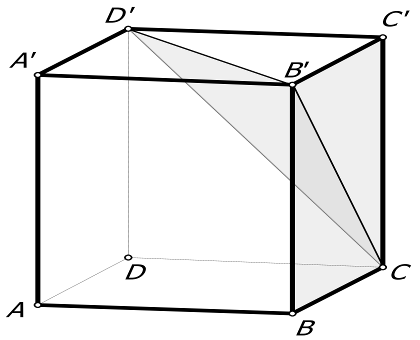
$$tgC'OC = \frac{CC'}{OC} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}.$$

Далее три задачи разбираем устно, рисуя линейные углы на чертежах.

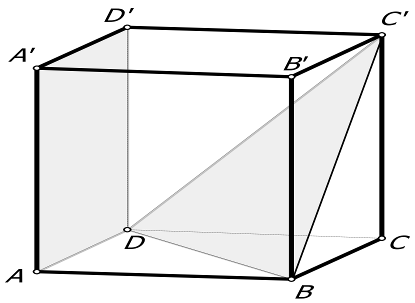
2. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите тангенс угла между плоскостями ABC и $CB'D'$.



3. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите тангенс угла между плоскостями BCC' и $CB'D'$.



4. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите тангенс угла между плоскостями ADD' и BDC'.

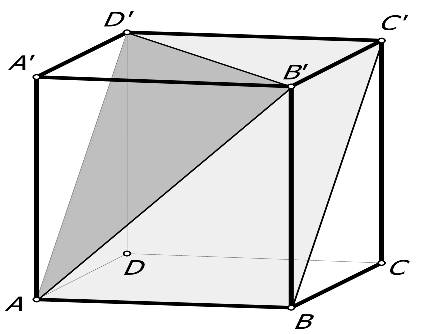


Ответы: $\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2}$.

Почему ответы в этих трех задачах одинаковые.

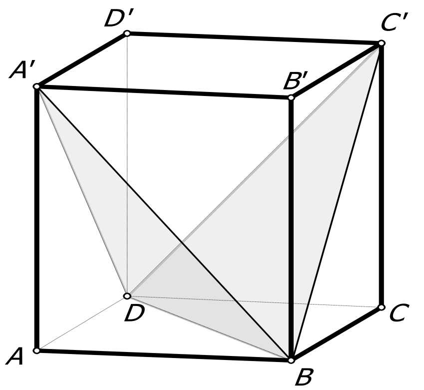
Далее работа в тетради.

5. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите тангенс угла между плоскостями ABC' и $AB'D'$.

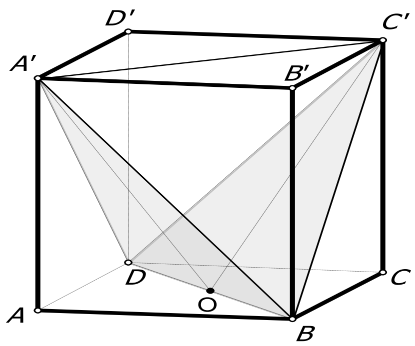


Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите косинус угла между плоскостями BDA' и BDC'.



Решение.



Рассматриваем $\Delta A'C'O$.

Находим все стороны этого треугольника.

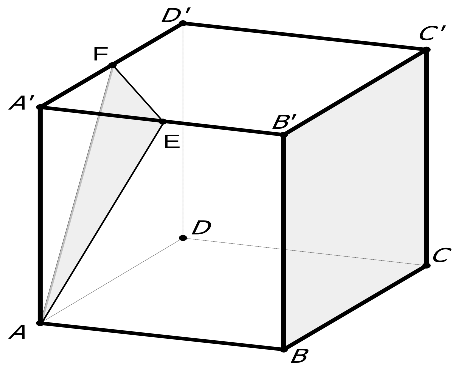
По теореме косинусов по трем сторонам находим $\cos A'OC'$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

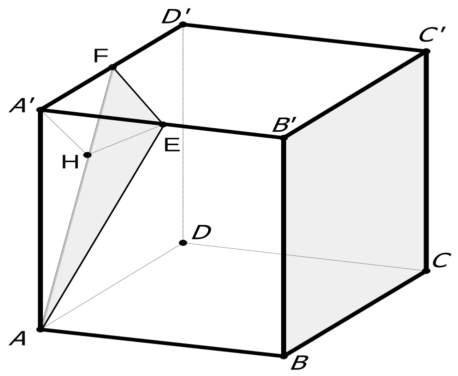
$A'O \perp DB, C'O \perp DB$.

Каково положение точки O?

7. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ точки E и F — середины ребер соответственно $A'B'$ и $A'D'$. Найдите тангенс угла между плоскостями AEF и BCC'.



Решение.



Прокомментируйте чертеж.

Искомый угол?

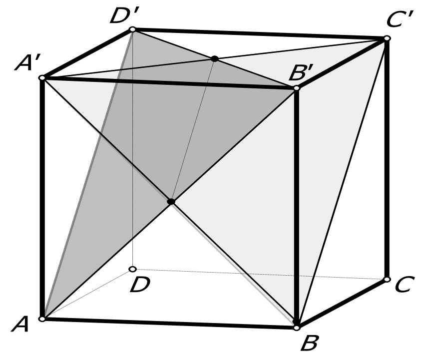
Какой $\Delta EA'H$?

Вычислите искомый угол.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

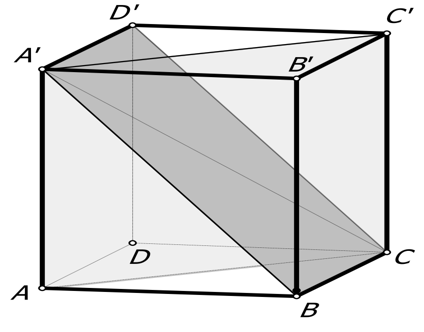
Домашнее задание

1. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите косинус угла между плоскостями $BA'C'$ и $AB'D'$.



Ответ: $\frac{1}{3}$.

2. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите угол между плоскостями BCD' и ACC'.



Ответ: 60.

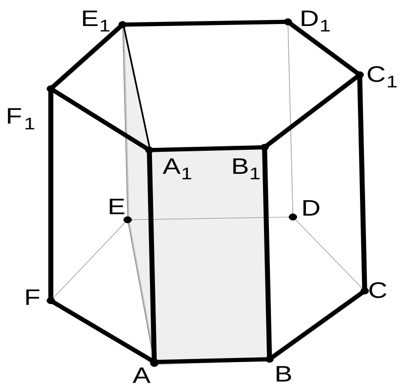
3. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ точки E и F — середины ребер соответственно $A'B'$ и $A'D'$. Найдите тангенс угла между плоскостями AEF и BDD'.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

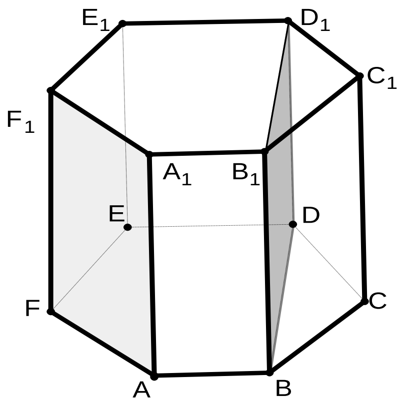
П р и з м ы

Устно

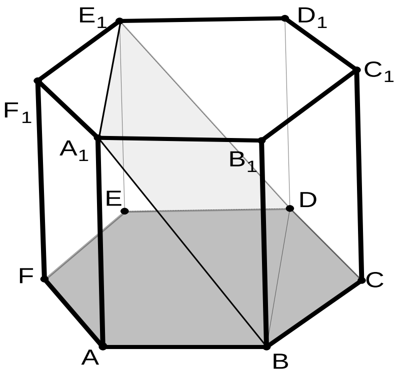
1. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1...F_1$ найдите угол между плоскостями ABB_1 и AEE_1.



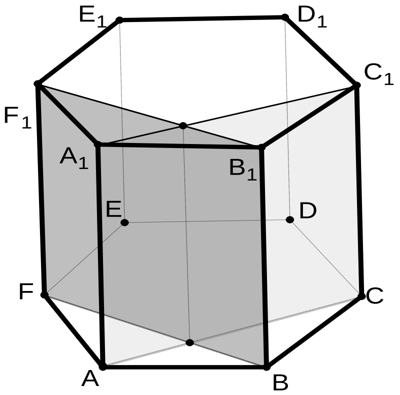
2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1...F_1$ найдите угол между плоскостями AFF_1 и BDD_1.



3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1...F_1$ найдите угол между плоскостями ABC и BDE_1.

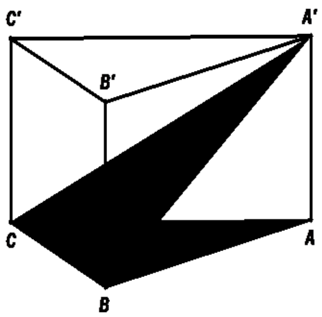


4. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1...F_1$ найдите угол между плоскостями ACC_1 и BFF_1.



Работа в тетради

1. В правильной треугольной призме $ABCA'B'C'$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между плоскостями ABC и BCA'.



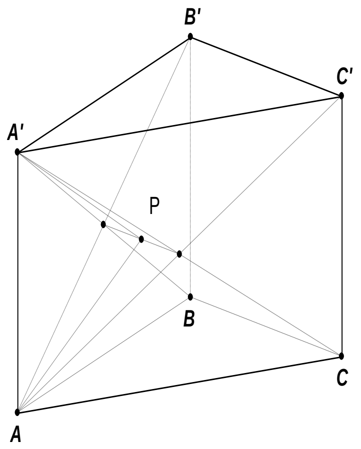
В каком прямоугольном треугольнике работаем? Проведите необходимые вычисления.

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Покажите линейный угол двугранного угла. Сделайте чертеж.

2. В правильной треугольной призме $ABCA'B'C'$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями BCA' и $AB'C'$.

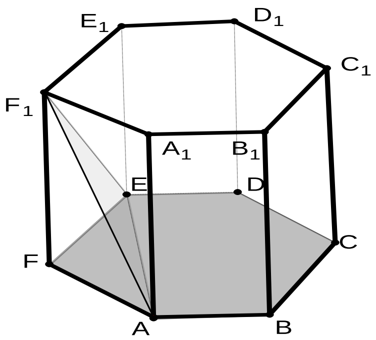
Решение.



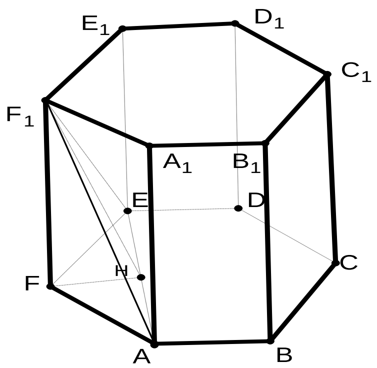
Искомый угол — $\angle APA'$.

Ответ: $\frac{1}{7}$.

3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между плоскостями ABC и AEF_1.



Решение.



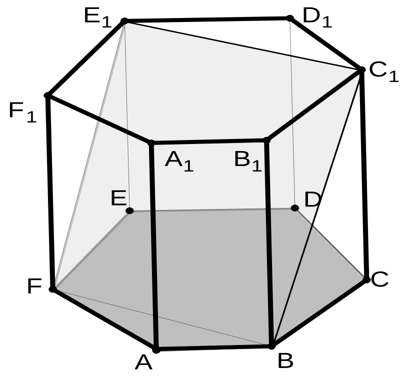
Искомый угол — FHF_1. Как получена точка H?

Как найти отрезок FH?

Объясните, почему $FH = \frac{1}{2}$.

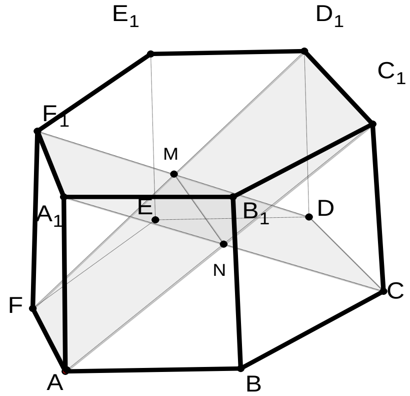
Ответ: 2.

4. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и BFE_1.



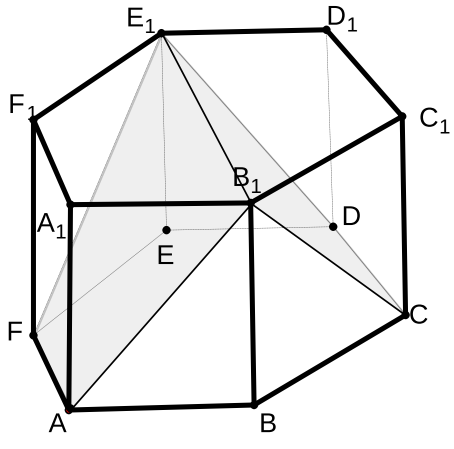
Решение.
Почему линейным углом данного двугранного угла есть угол E_1FE ? Докажите.
Ответ: 45.

5. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями AFD_1 и CDF_1.



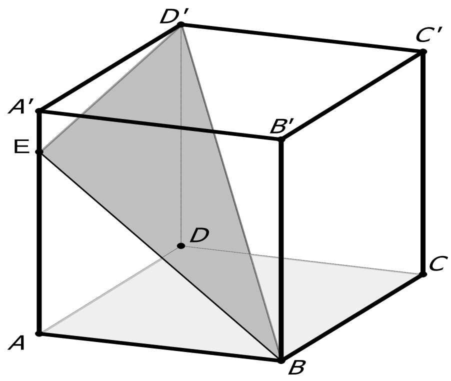
Решение.
Почему искомый угол — $\angle ANA_1$?
Как найти отрезок A_1N ?
Почему $A_1C = 2$?
Почему ΔANA_1 — равносторонний?
Ответ: 60.

6. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями AFE_1 и CDE_1.

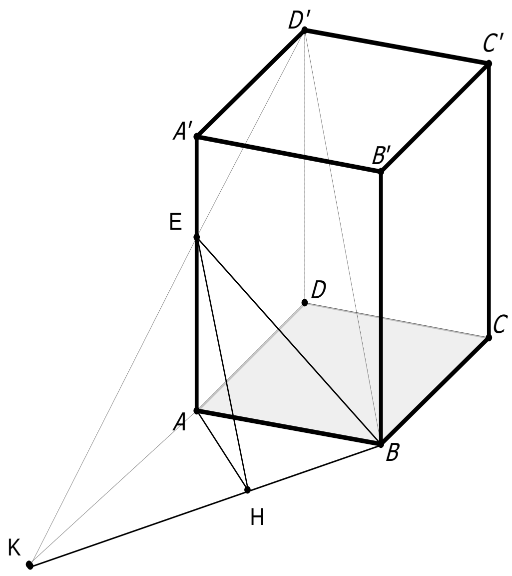


Постройте линейный угол двугранного угла и решите самостоятельно.
Ответ: $\frac{1}{7}$.

7. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 4. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 3:1$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.



Решение.



$AE = 3, EA_1 = 1$

Из подобия треугольников

A_1D_1E и AKE находим $AK = 3$.

$BK = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$AH = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

$tgAHE = \dfrac{AE}{AH} = \sqrt{10}$

Ответ: $arctg\sqrt{10}$.

Домашнее задание

1. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы. Ответ: 30^0.

2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 1, боковые ребра равны 2, точка D — середина ребра CC_1. Найдите угол между плоскостями ABC и ADB_1. Ответ: $arctg2$.

3. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 3, а боковые ребра равны 4. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 1 : 3$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

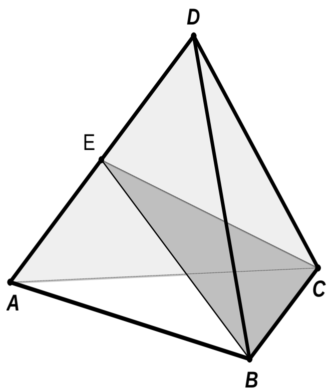
Ответ: $arctg\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точки D, E — середины ребер соответственно A_1B_1 и A_1C_1. Найдите тангенс угла между плоскостями ADE и BCC_1. Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

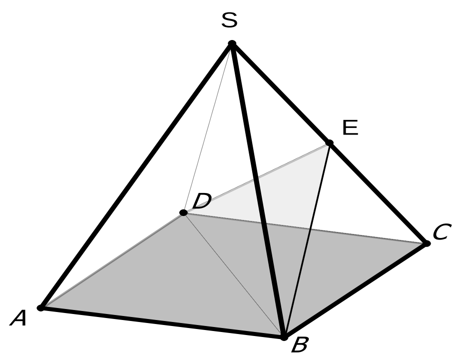
Пирамиды

Устно

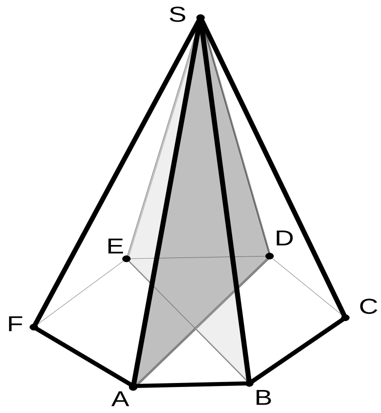
1. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка E — середина ребра AD. Найдите угол между плоскостями ACD и BCE (90^0).



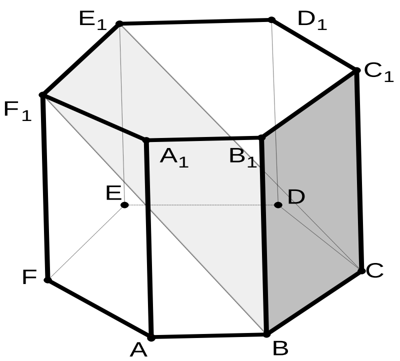
2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точка E — середина SC. Найдите угол между плоскостями ABC и BDE (30^0).



3. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ найдите угол между плоскостями SAD и SBE (30^0).

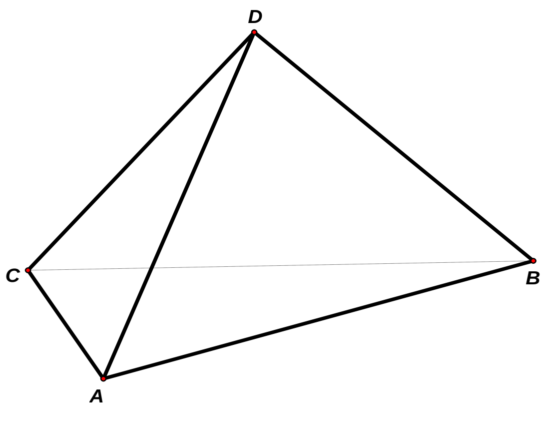


4. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями BCE_1 и BCC_1 (60^0).

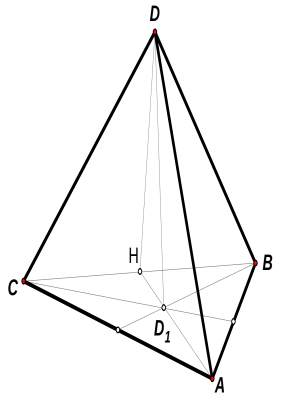


Работа в тетради

1. В тетраэдре $ABCD$, все ребра которого равны 1, найдите косинус угла между плоскостями ABC и ACD.



Решение.



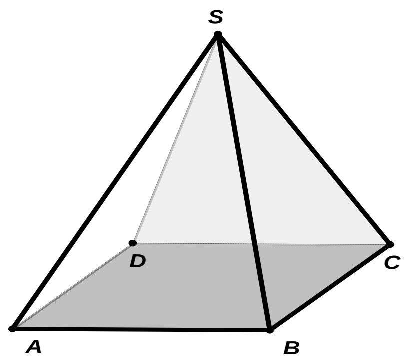
Каково положение точки H ?

Искомый угол — $\angle DHD_1$.

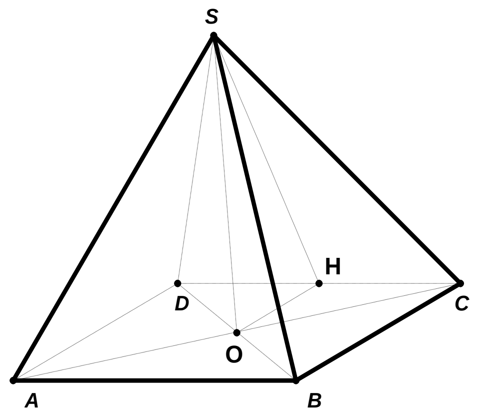
Рассматриваем прямоугольный треугольник — ΔDHD_1.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями ABC и SCD.



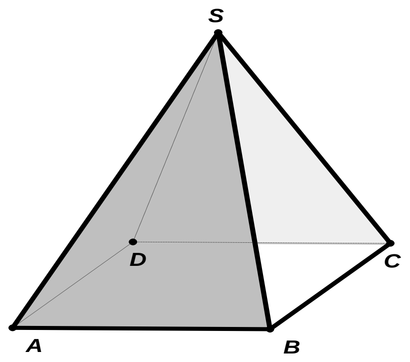
Решение.



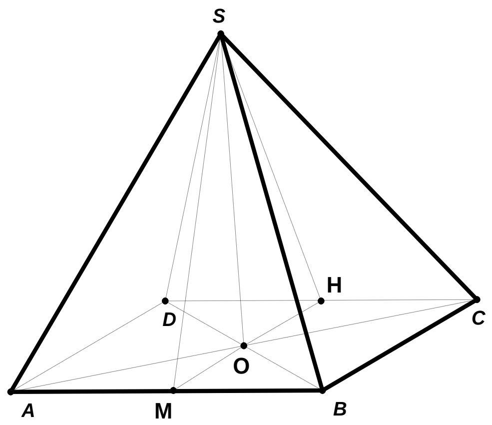
Продолжите решение.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями SAB и SCD.



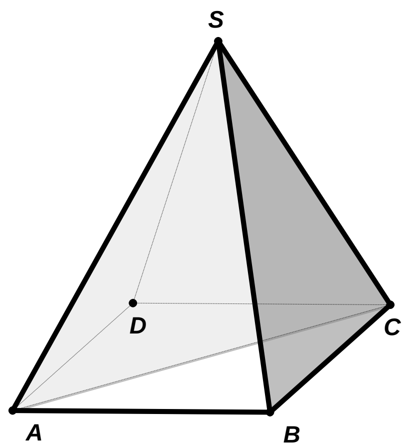
Решение.



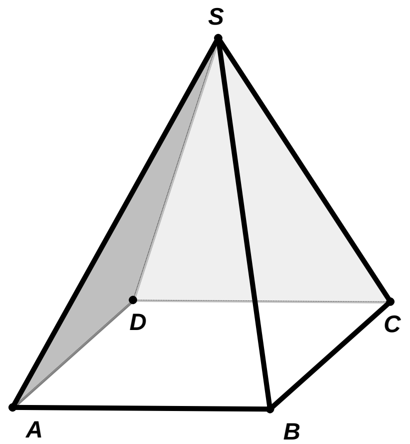
Искомый угол — $\angle MSH$.
Используем теорему косинусов в ΔMSH.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

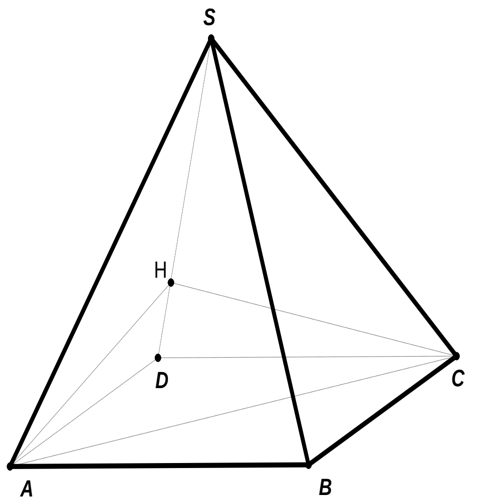
4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между плоскостями SAC и SBC.



5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите косинус двугранного угла, образованного гранями SAD и SCD.



Решение.

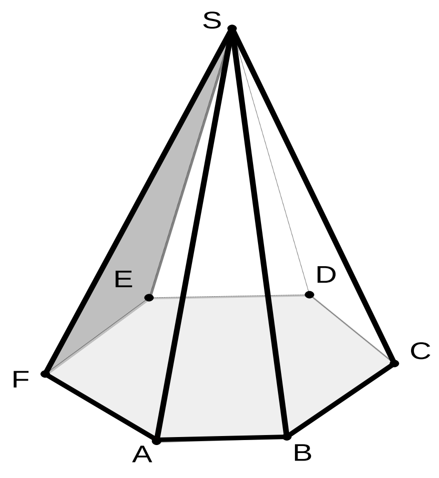


Искомый угол — $\angle AHC$.

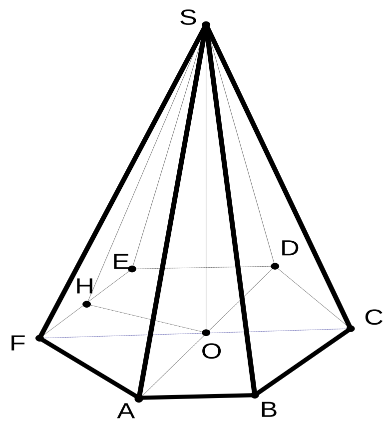
Как его будем искать?

Ответы к задачам 4 и 5: $\sqrt{2}$ и $-\frac{1}{3}$.

6. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между плоскостями ABC и SEF.



Решение.

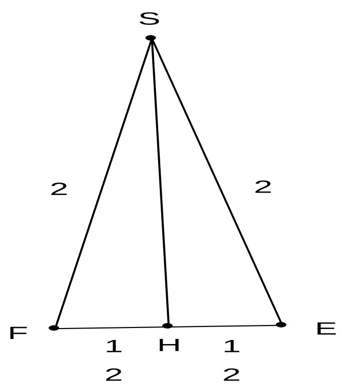


1. Рассматриваем ΔFOE. Он равносторонний. Почему? OH — высота в равностороннем треугольнике со стороной 1. Значит, $OH=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Почему? Распишите подробнее.

Как построили точку H?

Искомый угол — $\angle SHO$.

2. Рассмотрим ΔSFE

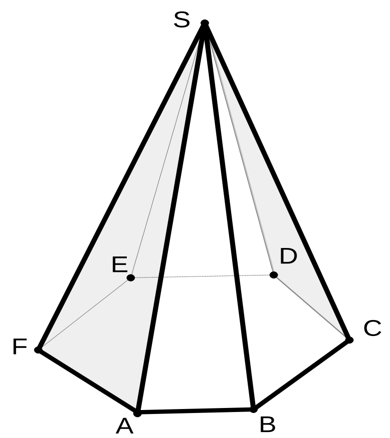


Тогда по теореме Пифагора в ΔFSH:

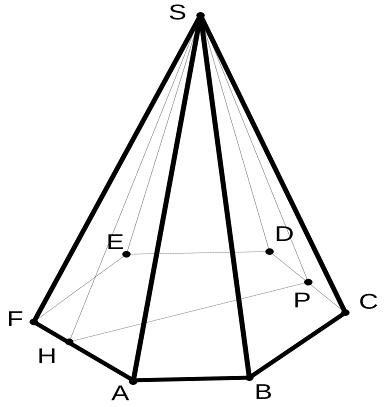
$$SH=\sqrt{2^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{4-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{15}}{2}.$$

3. $\cos SHO=\frac{HO}{SH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{15}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

7. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между плоскостями SAF и SCD.



Решение.



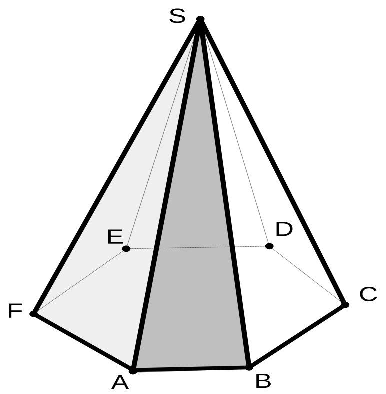
Искомый угол $\angle HSP$. Найдем его по теореме косинусов из треугольника ΔHSP.

Чему равен отрезок HP?

Почему можно рассмотреть ΔABC?

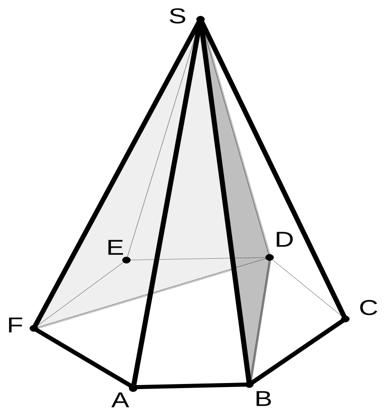
Ответ: 0,6.

8. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между плоскостями SAB и SAF.



Ответ: -0,6.

9. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между плоскостями SBD и SDF.



Ответ: $\frac{5}{13}$.

Домашнее задание

1. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ сторона основания равна $6\sqrt{2}$, а боковое ребро равно 10. Найдите угол между плоскостями ABC и ACM, где точка M делит ребро BS так, что $BM : MS = 2:1$.

Ответ: $arctg\frac{8}{3}$.

2. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является треугольник ABC, в котором $AC = BC = 6$, а один из углов равен 60^0. На ребре CC_1 отмечена точка P так, что $CP : PC_1 = 2:1$. Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и ABP, если расстояние между прямыми AC и A_1B_1 равно $18\sqrt{3}$. Ответ: 4.

3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра $AB = 8, AD = 6, CC_1 = 5$. Найдите угол между плоскостями BDD_1 и AD_1B_1.

Ответ: $arctg\frac{24}{25}$.

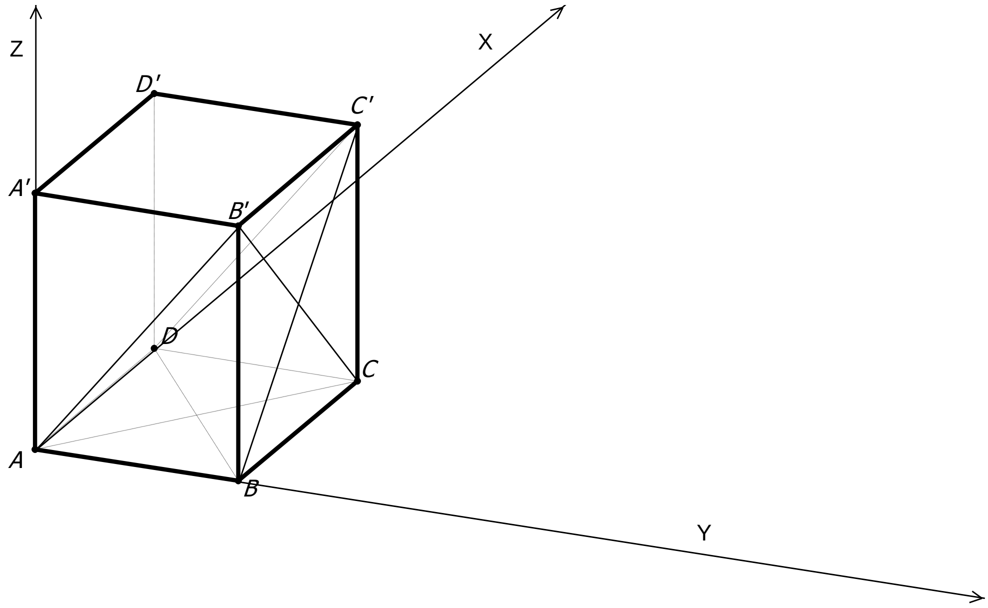
Метод координат

1. Нахождение угла между нормалями данных плоскостей.

Задачу о нахождении угла между плоскостями α и β, заданными уравнениями $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ соответственно, удобнее свести к задаче о нахождении угла между векторами их нормалей $\vec{n}_\alpha\{a_1; b_1; c_1\}$ и $\vec{n}_\beta\{a_2; b_2; c_2\}$, используя формулу $\cos\angle(\alpha;\beta) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|}$

П р и м е р:

1. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найти угол между плоскостями $AB'C$ и $BC'D$.



$A(0;0;0)$; $B(0;1;0)$; $C(1;1;0)$; $D(1;0;0)$; $B'(0;1;1)$;$C'(1;1;1)$

$\alpha: ax+by+cz+d=0 \quad \beta; ax+by+cz+d=0$

$$\begin{cases} d=0, \\ a+b+d=0, \\ b+c+d=0 \end{cases} \begin{cases} d=0, \\ a=-b, \\ c=-b \end{cases} \begin{cases} b+d=0, \\ a+d=0, \\ a+b+c+d=0 \end{cases} \begin{cases} b=-d, \\ a=-d, \\ c=d \end{cases}$$

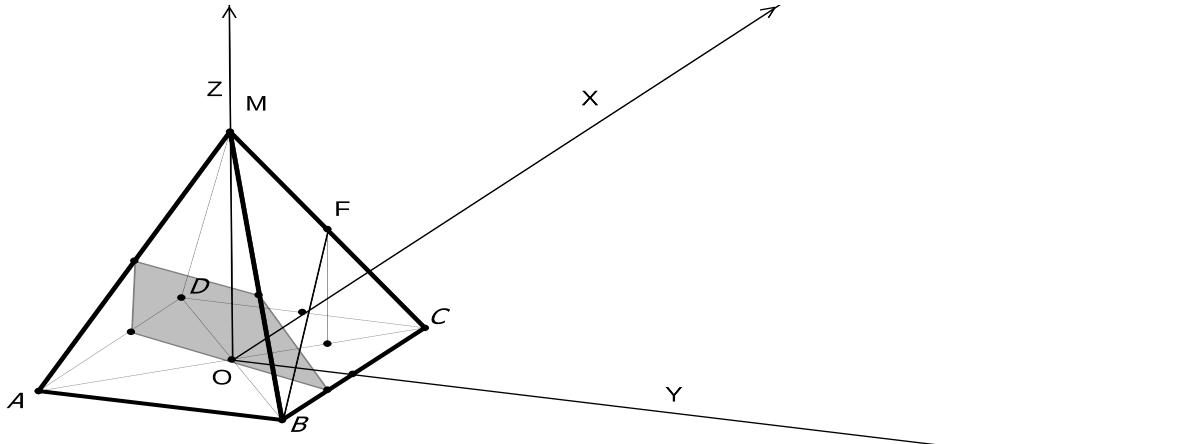
$\alpha: x-y+z=0 \quad \beta: x+y-z-1=0$

$\vec{n}_\alpha\{1;-1;1\} \quad \vec{n}_\beta\{1;1;-1\}$

$$\cos\varphi = \frac{|1-1-1|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$.

2. В правильной пирамиде $MABCD$ (M — вершина) высота и сторона основания равны 4. Точка F — середина ребра MC. Плоскость α проходит через середину ребра AM перпендикулярно прямой BF. Найти угол между: а) плоскостью α и плоскостью основания; б) плоскостью α и прямой DM.



Решение.

Так как $BF \perp \alpha$, то $\vec{BF}$ — нормаль к плоскости α, $\vec{OM}$ — нормаль к плоскости ABC.

$$\cos\angle(\alpha, ABC) = \frac{|\vec{BF} \cdot \vec{OM}|}{|\vec{BF}| \cdot |\vec{OM}|}; \ \sin\angle(\alpha, DM) = \frac{|\vec{BF} \cdot \vec{DM}|}{|\vec{BF}| \cdot |\vec{DM}|}$$

$O(0;0;0)$ $B(-2;2;0)$ $D(2;-2;0)$

$M(0;0;4)$ $F(1;1;2)$

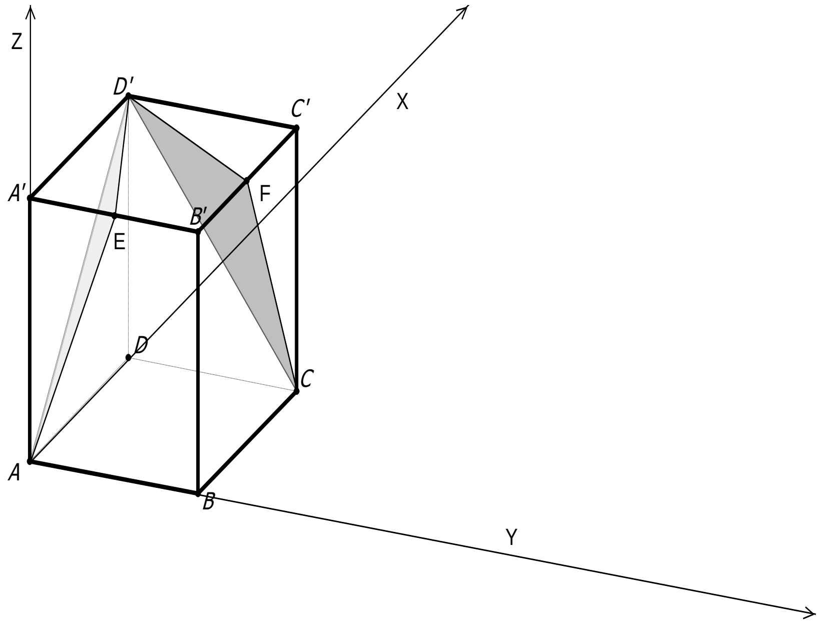
$\vec{OM}\{0;0;4\}$ $\vec{BF}\{3;-1;2\}$ $\vec{DM}\{-2;2;4\}$

$$\cos\angle(\alpha, ABC) = \frac{|\vec{BF} \cdot \vec{OM}|}{|\vec{BF}| \cdot |\vec{OM}|} = \frac{|2 \cdot 4|}{\sqrt{14} \cdot 4} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\sin\angle(\alpha, DM) = \frac{|\vec{BF} \cdot \vec{DM}|}{|\vec{BF}| \cdot |\vec{DM}|} = \frac{|3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 4|}{\sqrt{14} \cdot 2\sqrt{6}} = 0$$

Ответ: $\arccos\frac{2}{\sqrt{14}};0$.

3. В единичном кубе $ABCDA'B'C'D'$ найти угол между плоскостями $AD'E$ и $D'FC$, где точки E и F — середины ребер $A'B'$ и $B'C'$ соответственно.



$A(0;0;0)$; $D'(1;0;1)$; $E\left(0;\frac{1}{2};1\right)$; $F\left(\frac{1}{2};1;1\right)$; $D'(1;0;1)$; $C(1;1;0)$

$AED': ax+by+cz+d=0 \quad D'FC: ax+by+cz+d=0$

$$\begin{cases} d=0, \\ \frac{1}{2}b+c+d=0, \\ a+c+d=0 \end{cases} \begin{cases} d=0, \\ a=-c, \\ b=-2c \end{cases} \begin{cases} a+c+d=0, \\ \frac{1}{2}a+b+c+d=0 \\ a+b+d=0 \end{cases} \begin{cases} c=b, \\ a=2b, \\ d=-3b \end{cases}$$

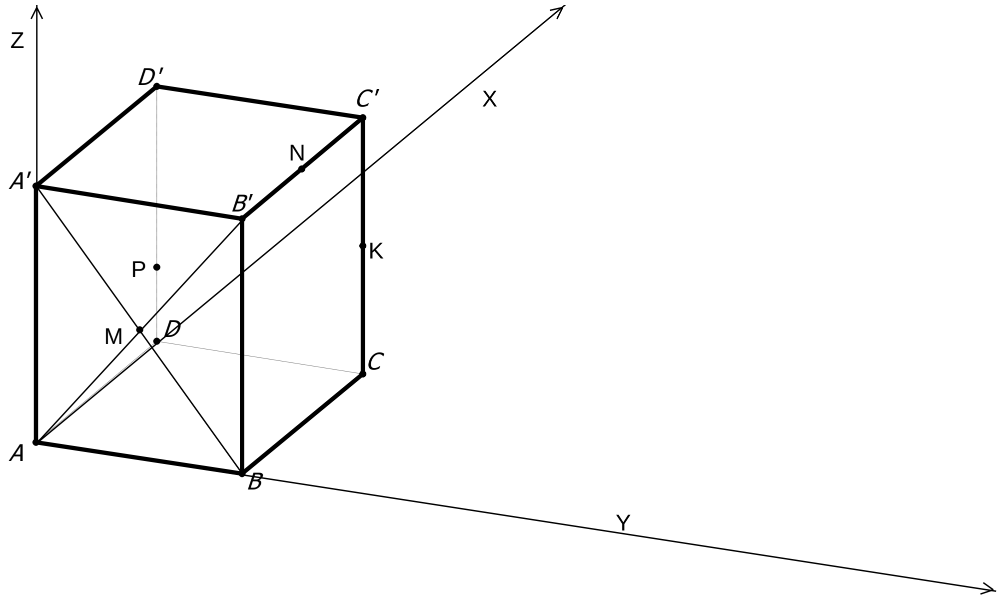
$-cx-2cy+cz=0 \quad 2bx+by+bz-3b=0$

$x+2y-z=0 \quad 2x+y+z-3=0$

$\vec{n}_1\{1;2;-1\} \quad \vec{n}_2\{2;1;1\}$

$\cos\varphi = \frac{|2+2-1|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $\angle\varphi = 60^0$. Ответ: 60^0.

4. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$. Найти угол между плоскостями MNP и AKD, где точка M — центр грани $AA'B'B$, N — середина ребра $B'C'$, K — середина ребра CC', точка P — делит ребро DD' в отношении $DP:PD'=1:2$.



Проведите решение самостоятельно.

$MNP: \vec{n}_1\{2;7;-9\}$; $AKD: \vec{n}_2\{0;1;-2\}$; $\cos\varphi = \sqrt{\dfrac{125}{134}}$. Ответ: $\arccos\sqrt{\dfrac{125}{134}}$.

Подготовка к самостоятельной работе

1. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 4. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE:EA_1 = 3:1$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1. Ответ: $arctg\sqrt{10}$.

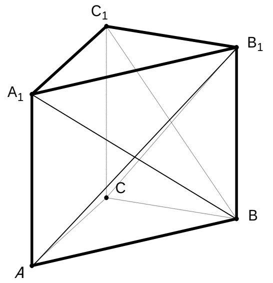
2. В правильной треугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB = 2$, а боковое ребро $SA = \sqrt{3}$. Найдите угол между плоскостями SBC и SAD. Ответ: 90^0.

3. Основание пирамиды $DABC$ — равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 13, AC = 24.$ Ребро DB перпендикулярно плоскости основания и равно 20. Найдите тангенс двугранного угла при ребре AC. Ответ: 4.

Самостоятельная работа

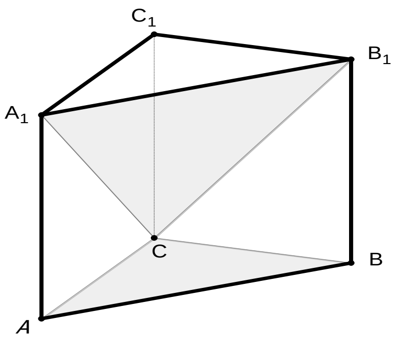
Вариант 1

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями ACB_1 и BA_1C_1.



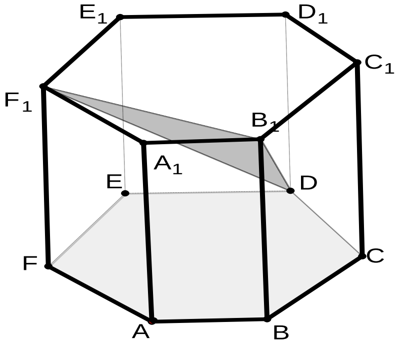
Вариант 2

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между плоскостями ABC и CA_1B_1.



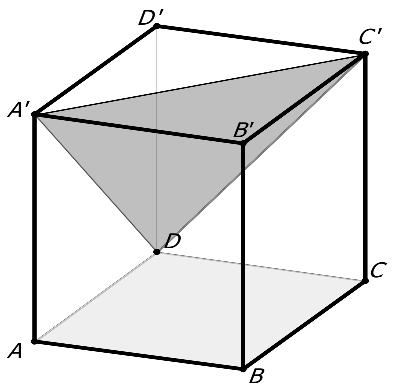
Вариант 3

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между плоскостями ABC и DB_1F_1.



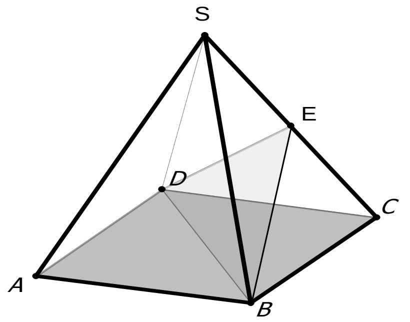
Вариант 4

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между плоскостями ABC и DA_1C_1.



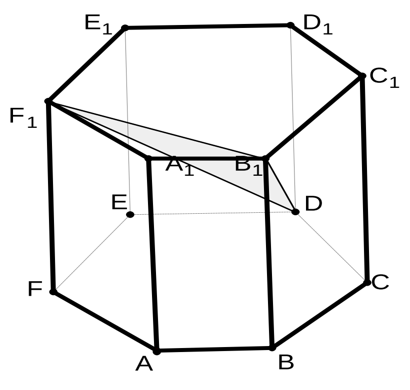
Вариант 5

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точка E — середина ребра SC. Найдите угол между плоскостями ABC и BDE.



Вариант 6

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между плоскостями ABC и DB_1F_1.



Ответы: 1. $\frac{1}{7}$; 2. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; 3. $\frac{2}{3}$; 4. $\sqrt{2}$; 5. 45^0; 6. $\frac{2}{3}$.

ТИПОВЫЕ И ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАНИЯ С5

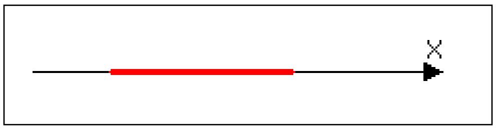
В действующем формате ЕГЭ задания С5 содержат параметры. Решение таких заданий предполагает исследование свойств входящих в них элементарных функций и, как правило, построение графиков.

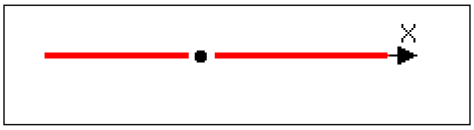
1. (ЕГЭ 2010). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых ровно одно решение неравенство $x^2+(5a+3)x+4a^2\le 4$ удовлетворяет неравенству $ax\cdot(x-4-a)\le 0$.

Решение.

$x^2+(5a+3)x+4a^2\le 4$; $(x-(-4a-4))\cdot(x-(-a+1))\le 0$.

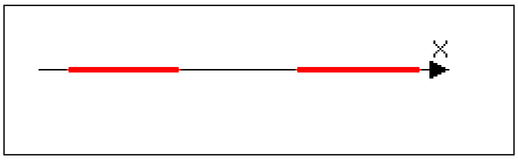
Множество решений неравенства образует отрезок с концами $x_1=(-4a-4)$ и $x_2=(-a+1)$, возможно, вырожденный в точку.





Множество решений неравенства $ax\cdot(x-4-a)\le 0$ образует

при $a<0$ объединение двух лучей, направленных в разные стороны, с концами $x_1=0$ и $x_2=4+a$, возможно, склеенных в одну прямую;



при $a>0$ — отрезок с этими же концами;

при $a=0$ — всю прямую.

Ровно одна точка первого множества может принадлежать второму только тогда, когда первое вырождается в точку или один из его концов совпадает с концом второго множества, т. е. в следующих случаях:

а) $-4a-4=-a+1$; $a=-\frac{5}{3}$; $x=\frac{8}{3}$ — удовлетворяет второму неравенству.

Таким образом, условие задачи выполнено. Первое неравенство имеет только одно решение, которое является также решением второго неравенства.

б) $-4a-4=0$; $a=-1$. Решение первого неравенства: $0\le x\le 2$, решение второго неравенства: $x\le 0$; $x\ge 3$. Одно решение первого неравенства $(x=0)$ удовлетворяет второму неравенству.

в) $-4a-4=4+a$; $a=-\frac{8}{5}$. Решение первого неравенства: $\frac{12}{5}\le x\le \frac{13}{5}$, решение второго неравенства: $0\le x\le 5$; $x\ge \frac{12}{5}$. Условие задачи не выполняется, т. к. все решения первого неравенства являются решениями второго.

г) $-a+1=0$; $a=1$. Решение первого неравенства: $-8\le x\le 0$, решение второго неравенства: $x\le 0$; $x\ge 3$. Одно решение первого неравенства $(x=0)$ удовлетворяет второму неравенству.

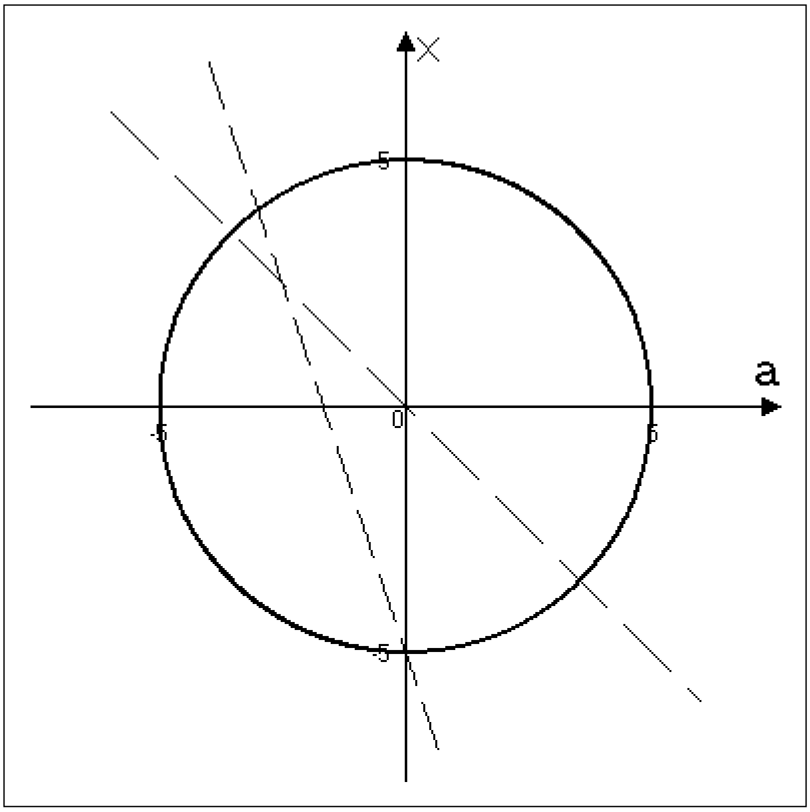
д) $-a+1=4+a$; $a=-\frac{3}{2}$. Решение первого неравенства: $2\le x\le \frac{5}{2}$, решение второго неравенства: $x\le 0$; $x\ge \frac{5}{2}$. Одно решение первого неравенства $\left(x=\frac{5}{2}\right)$ удовлетворяет второму неравенству.

Ответ: $-\frac{5}{3}$; $-\frac{3}{2}$; -1; 1.

2. (ЕГЭ 2011). Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2+(4a+5)x+3a^2+5a<0 \\ x^2+a^2=25 \end{cases}$ имеет решения.

Решение.

Разложим левую часть неравенства на множители $(x+3a+5)\cdot(x+a)<0$. Это неравенство задает пару вертикальных углов плоскости Oax. Уравнение задает окружность с центром $(0;0)$ радиуса 5.



Решения системы – точки дуг окружности, лежащие в указанных вертикальных углах. Абсциссы концов этих дуг находим из систем

$\begin{cases} x+3a+5=0 \\ x^2+a^2=25 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+a=0 \\ x^2+a^2=25 \end{cases}$

$\begin{cases} x=-3a-5 \\ 9a^2+30a+25+a^2=25 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-a \\ 2a^2=25 \end{cases}$

$a=-3$; $a=0$. $a=-\frac{5\sqrt{2}}{2}$; $a=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

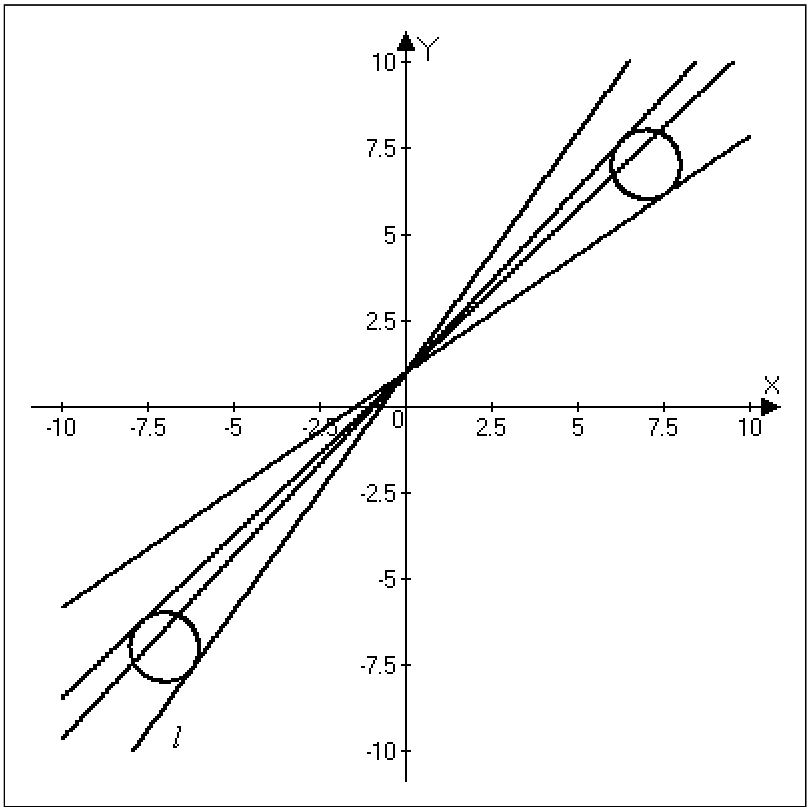
Ответ: $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2};-3\right)$; $\left(0;\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.

3. (ЕГЭ 2011). Найдите все значения a, при каждом из которых система

$\begin{cases} (|x|-7)^2+(|y|-7)^2=1 \\ y=ax+1 \\ xy>0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение.

Первое уравнение при условии $xy > 0$ задает на плоскости две единичные окружности с центрами $(7;7)$ и $(-7;-7)$, а второе – прямую l с угловым коэффициентом a, проходящую через точку $(0;1)$.



Прямая l касается окружности с центром в точке $(-7;-7)$ единичного радиуса тогда и только тогда, когда система $\begin{cases} y = ax + 1 \\ (x+7)^2 + (y+7)^2 = 1 \end{cases}$ (1) имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение $(x+7)^2 + (ax+1+7)^2 = 1$ имело единственное решение. Приведем уравнение к виду $(a^2+1)x^2 + 2(8a+7)x + 112 = 0$ и из равенства нулю дискриминанта получим: $(8a+7)^2 - 112(a^2+1) = 0$, откуда $48a^2 - 112a + 63 = 0$. Значит, $a_{1,2} = \dfrac{14 \pm \sqrt{7}}{12}$ и система (1) имеет решения только при $\dfrac{14-\sqrt{7}}{12} \le a \le \dfrac{14+\sqrt{7}}{12}$.

Аналогично, прямая l касается окружности с центром в точке $(7;7)$ единичного радиуса тогда и только тогда, когда система $\begin{cases} y = ax+1 \\ (x-7)^2 + (y-7)^2 = 1 \end{cases}$ (2) имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение $(x-7)^2 + (ax+1-7)^2 = 1$ имело единственное решение. Приведем уравнение к виду $(a^2+1)x^2 - 2(6a+7)x + 84 = 0$ и из равенства нулю дискриминанта получим: $(6a+7)^2 - 84(a^2+1) = 0$, откуда $48a^2 - 84a + 35 = 0$. Значит, $a_{3,4} = \frac{21 \pm \sqrt{21}}{24}$ и система (2) имеет решения только при $\frac{21-\sqrt{21}}{24} \le a \le \frac{21+\sqrt{21}}{24}$.

Так как $\frac{21-\sqrt{21}}{24} < \frac{14-\sqrt{7}}{12} < \frac{21+\sqrt{21}}{24} < \frac{14+\sqrt{7}}{12}$, то исходная система имеет единственное решение при $a = \frac{21-\sqrt{21}}{24}$ и при $a = \frac{14+\sqrt{7}}{12}$.

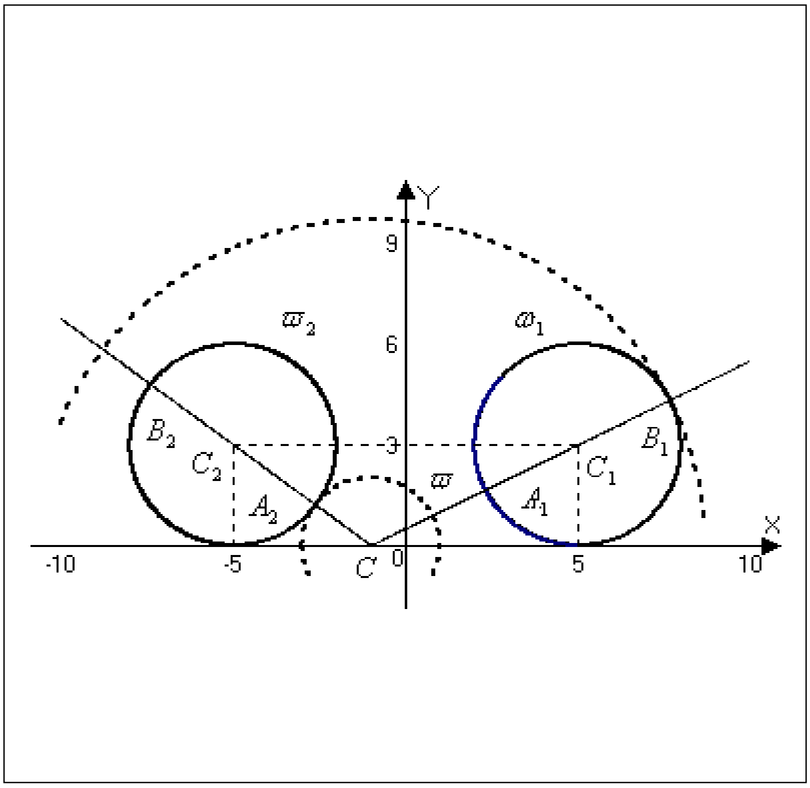
Ответ: $\frac{21-\sqrt{21}}{24}$; $\frac{14+\sqrt{7}}{12}$.

4. (ЕГЭ 2011). Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} (|x|-5)^2 + (y-3)^2 = 9 \\ (x+1)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение.

Если $x \ge 0$, то уравнение $(|x|-5)^2 + (y-3)^2 = 9$ задает окружность ω_1 с центром в точке C_1 $(5;3)$ радиуса 3, а если $x < 0$, то оно задаёт окружность ω_2 с центром в точке C_2 $(-5;3)$ радиуса 3.

При положительных значениях параметра a уравнение $(x+1)^2 + y^2 = a^2$ задает окружность ω с центром в точке C $(-1;0)$ радиуса a. Поэтому задача состоит в том, чтобы найти все значения a, при каждом из которых окружность ω имеет единственную общую точку с объединением окружностей ω_1 и ω_2.



Из точки C проведем луч CC_1 и обозначим A_1 и B_1 точки его пересечения с окружностью ω_1, где A_1 лежит между C и C_1. Так как $CC_1 = \sqrt{(5+1)^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$, то $CA_1 = 3\sqrt{5} - 3$, $CB_1 = 3\sqrt{5} + 3$.

При $a < CA_1$ или $a > CB_1$ окружности ω и ω_1 не пересекаются.

При $CA_1 < a < CB_1$ окружности ω и ω_1 имеют две общие точки.

При $a = CA_1$ или $a = CB_1$ окружности ω и ω_1 касаются.

Из точки C проведем луч CC_2 и обозначим A_2 и B_2 точки его пересечения с окружностью ω_2, где A_2 лежит между C и C_2. Так как $CC_2 = \sqrt{-(5+1)^2 + 3^2} = 5$, то $CA_2 = 5 - 3 = 2$, $CB_2 = 5 + 3 = 8$.

При $a < CA_1$ или $a > CB_1$ окружности ω и ω_2 не пересекаются.

При $CA_1 < a < CB_1$ окружности ω и ω_2 имеют две общие точки.

При $a = CA_1$ или $a = CB_1$ окружности ω и ω_2 касаются.

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность ω касается ровно с одной из окружностей ω_1 и ω_2 и не пересекается с другой.

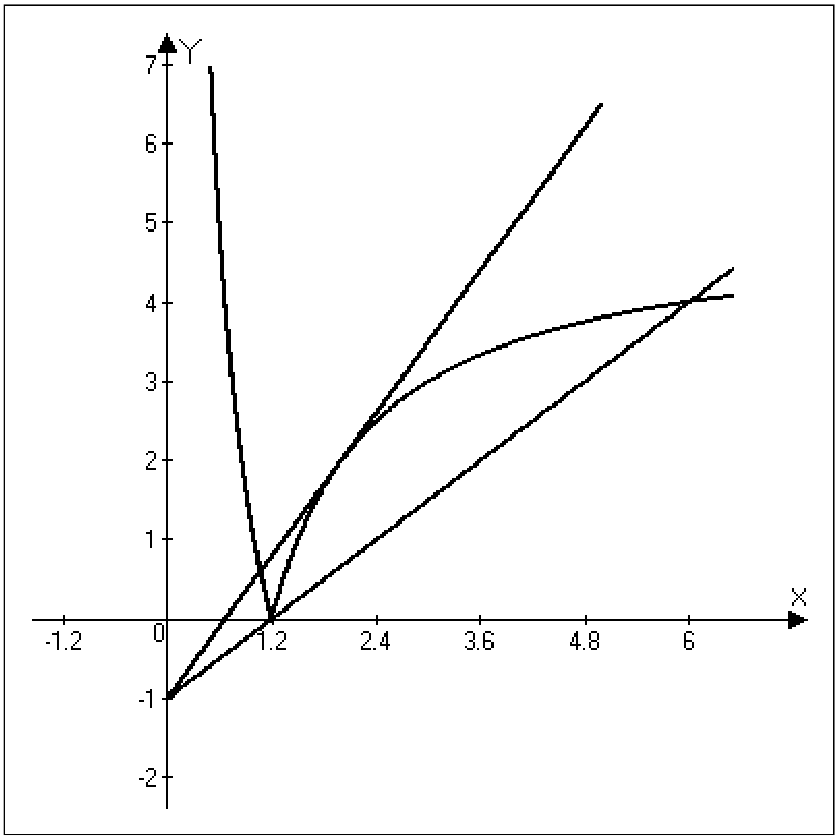
Ответ: 2; $3\sqrt{5}+3$.

5. (ЕГЭ 2012). Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{6}{x}-5\right| = ax-1$ на промежутке $(0;+\infty)$ имеет более двух корней.

Решение.

Рассмотрим функции $f(x)=ax-1$ и $g(x)=\left|\frac{6}{x}-5\right|$. При $a \le 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $(0;+\infty)$ отрицательны, а все значения $g(x)$ — неотрицательны, поэтому при $a \le 0$ уравнение $f(x)=g(x)$ не имеет решений на промежутке $(0;+\infty)$.

При $a>0$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на промежутке $\left(0;\frac{6}{5}\right]$, поэтому уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного решения на этом промежутке. Это решение существует тогда и только тогда, когда $f\left(\frac{6}{5}\right) \ge g\left(\frac{6}{5}\right)$. Отсюда получаем: $a\cdot\frac{6}{5}-1 \ge 0$, $a \ge \frac{5}{6}$.



На промежутке $\left(\frac{6}{5};+\infty\right)$ уравнение $f(x)=g(x)$ принимает вид $ax-1=5-\frac{6}{x}$ или $ax^2-6x+6=0$. $\frac{D}{4}=36-24a$. При $0<a<\frac{3}{2}$ уравнение имеет два действительных корня, оба корня при $a\geq\frac{5}{6}$ принадлежащих промежутку $\left(\frac{6}{5};+\infty\right)$, т. к. в этом случае $a\left(\frac{6}{5}\right)^2-6\cdot\frac{6}{5}+6>0$.

Ответ: $\frac{5}{6}<a<\frac{3}{2}$.

Критерии оценивания

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

6. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $4x^6-81x^4-4px^3+p^2=0$ имеет нечетное число различных корней.

Решение.

Разложим левую часть уравнения на множители:

$(2x^3-p)^2-81x^4=0$; $(2x^3-p-9x^2)\cdot(2x^3-p+9x^2)=0$.

Таким образом, получили следующую совокупность двух уравнений:

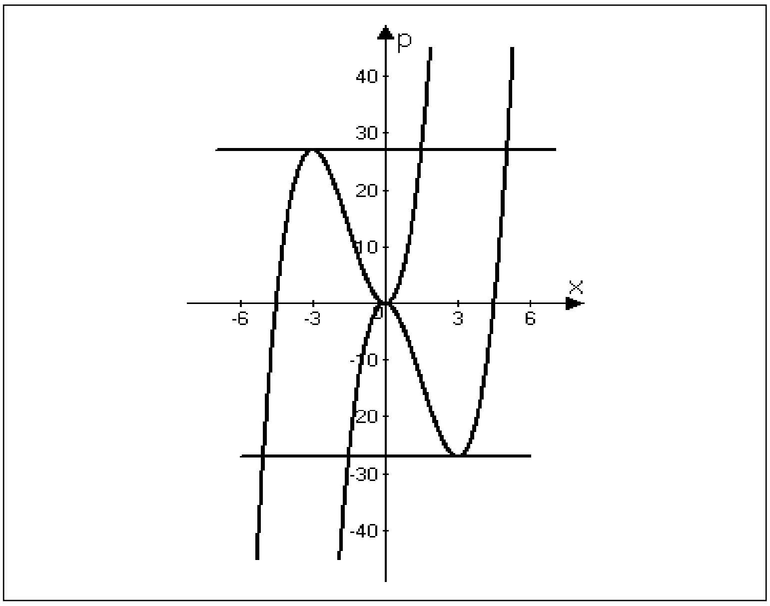
$$\left[\begin{array}{l} p=2x^3-9x^2 \\ p=2x^3+9x^2 \end{array}\right.$$

На плоскости xOp построим графики функций

$p=2x^3-9x^2$ и	$p=2x^3+9x^2$
$p'=6x^2-18x$	$p'=6x^2-18x$
$p'=0$	$p'=0$
$x=0$ — точка максимума	$x=-3$ — точка максимума

$x = 3$ — точка минимума $\qquad\qquad$ $x = 0$ — точка минимума

$p(0) = 0$; $p(3) = -27$. $\qquad\qquad$ $p(-3) = 27$; $p(0) = 0$.



Ответ: -27; 0; 27.

7. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение.

Если $(x; y)$ — решение системы, то и $(-x; y)$ также является решением системы. Таким образом, условие $x = 0$ является необходимым условием единственности решения. При $x = 0$ имеем $\begin{cases} 3a = 7 - 3y \\ y^2 = 1 \end{cases}$. Если $y = 1$, то $a = \frac{4}{3}$; если $y = -1$, то $a = \frac{10}{3}$.

При $a = \frac{4}{3}$ система имеет вид $\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|} + 5|x| = 3y + 5x^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$.

Из второго уравнения следует, что $|x| \le 1$; $|y| \le 1$; $5x^2 \le 5|x|$.

Так как $2^{|x|} \ge 1$, то $3\cdot 2^{|x|} + 5|x| \ge 3y + 5x^2$, $2^{|x|} = 1$; $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ — единственное решение.

При $a = \frac{10}{3}$ система имеет вид $\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|} + 5|x| = 3y + 5x^2 + 6 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$.

Подбором получим, что кроме решения $(0;1)$, система имеет решения $(1;0)$ и $(-1;0)$.

Ответ: $\frac{4}{3}$.

8. Найдите наибольшее целое значение a, при котором уравнение $3x^2-12x+3a+9=4\sin\frac{4x-x^2-a-3}{2}\cdot\cos\frac{x^2-2x-a-1}{2}$ имеет ровно два различных решения.

Решение.

Преобразуем правую часть уравнения по формуле $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\beta-\alpha)}{2}$.

Получим $4\sin\frac{4x-x^2-a-3}{2}\cdot\cos\frac{x^2-2x-a-1}{2}=2\left(\sin(x-a-2)-\sin\left(x^2-3x+1\right)\right)$.

Левую часть уравнения преобразуем следующим образом:

$3x^2-12x+3a+9=3\left(x^2-4x+a+3\right)=3\left(\left(x^2-3x+1\right)-(x-a-2)\right)$.

Обозначим $U=x-a-2$; $V=x^2-3x+1$, тогда уравнение примет вид: $3V-3U=2\sin U-2\sin V$ или $3U+2\sin U=3V+2\sin V$.

Введем функцию $f(t)=3t+2\sin t$.

Так как $f'(t)=3+2\cos t>0$, то $f(t)$ — монотонно возрастающая функция.

Следовательно, $f(U)=f(V)\Leftrightarrow U=V$.

Отсюда имеем $x-a-2=x^2-3x+1$;

$x^2-4x+a+3+0$; $\frac{D}{4}=4-3-a>0$; $1-a>0$; $a<1$.

Ответ: $a=0$.

9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sin(x-3a)+\sin\left(\frac{x^2-6x+7a}{2}\right)=4x-x^2-a$ не имеет действительных решений.

Решение.

Обозначим $U=x-3a$, $V=\frac{x^2-6x+7a}{2}$, тогда $4x-x^2-a=-2U-2V$.

В результате указанной замены исходное уравнение примет следующий вид:

$\sin U + 2U = -\sin V - 2V$.

Введем функцию $f(t) = \sin t + 2t$ и запишем уравнение в виде $f(U) = -f(V)$ или с учетом нечетности $f(t)$: $f(U) = f(-V)$

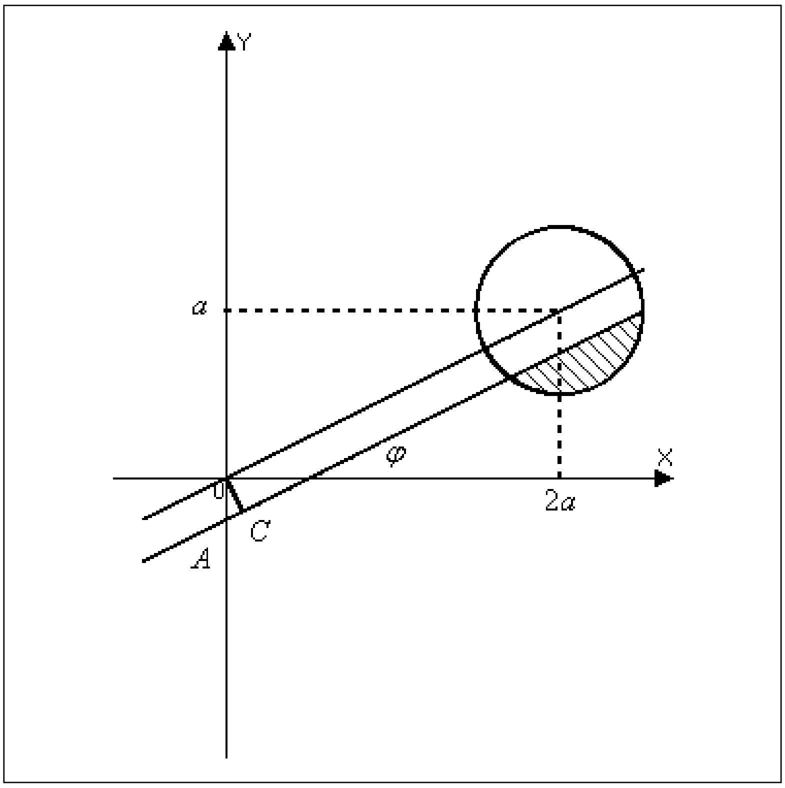
Так как $f'(t) = \cos t + 2 > 0$, то $f(t)$ — монотонно возрастающая функция, то $f(U) = f(-V) \Leftrightarrow U = -V$.

Отсюда имеем $x - 3a = -\dfrac{x^2 - 6x + 7a}{2}$;

$x^2 - 4x + a = 0$; $\dfrac{D}{4} = 4 - a < 0$; $a > 4$.

Ответ: $a > 4$.

10. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} \sqrt{(x-2a)^2 + (y-a)^2} \le \dfrac{|a|}{6\sqrt{5}} \\ x - 2y \ge 1 \end{cases}$ имеет решения.



Решение.

Первое неравенство задает на координатной плоскости круг радиуса $\dfrac{|a|}{6\sqrt{5}}$ с центром в точке $O_1(2a; a)$. Второе неравенство задает полуплоскость с границей $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}$. Очевидно, что центр круга при всех значениях a лежит вне заданной полуплоскости, т. к. $2a - 2a = 0 < 1$.

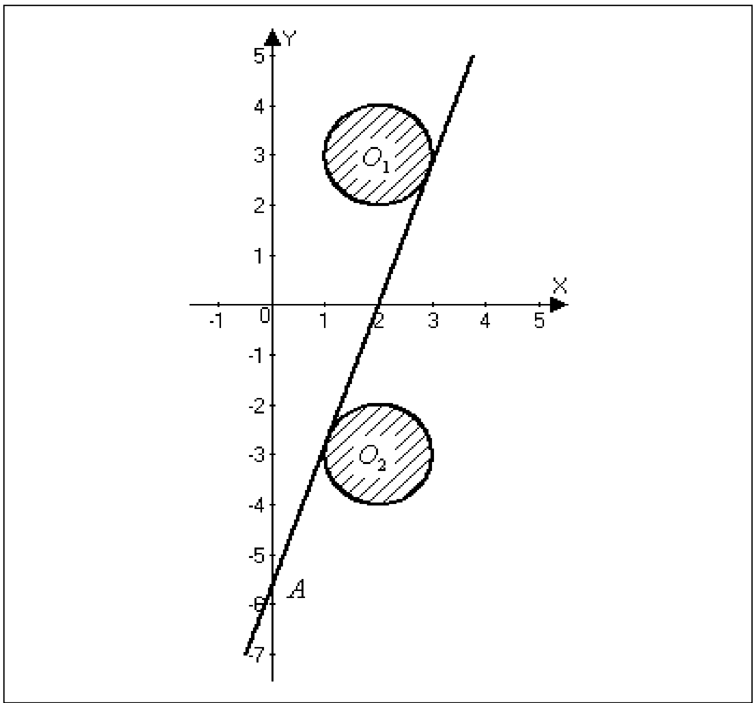
Система имеет решения, если круг и полуплоскость имеют общие точки, т. е. если радиус окружности не меньше расстояния от точки $O_1(2a;a)$ до прямой $x-2y-1=0$. Расстояние от точки $(x_0;y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ находится по формуле $\rho=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Отсюда $\rho=\dfrac{|2a-2a-1|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; $\dfrac{|a|}{6\sqrt{5}}\ge\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; $|a|\ge 6$.

Не используя данную формулу, можно было потребовать, чтобы радиус был не меньше расстояния между параллельными прямыми $y=\dfrac{x}{2}$ и $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}$.

Из треугольника ABC $OC=\dfrac{1}{2}\cdot\cos\varphi$; $tg\varphi=\dfrac{1}{2}$; $\cos\varphi=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$; $OC=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Далее аналогично.

Ответ: $a\le -6$; $a\ge 6$.

11. Найдите все значения a и b такие, что система $\begin{cases} x^2+y^2-4x-6|y|+13-b^2\le 0 \\ y=ax-2\sqrt{8} \end{cases}$ имеет ровно два различных корня.



Решение.

Выделим в первом неравенстве полные квадраты, получим следующую систему:

$$\begin{cases} (x-2)^2+(y\pm 3)^2\le b^2 & (1) \\ y=ax-4\sqrt{2} & (2) \end{cases}.$$

Неравенство (1) задает два круга, симметричных относительно оси абсцисс, с центрами $O_1(2;3)$; $O_2(2;-3)$ и радиусом $|b|$. Уравнение (2) — пучок прямых, проходящих через точку $A(0;4\sqrt{2})$. Таким образом, получим следующую геометрическую интерпретацию задачи: найти угловой коэффициент прямой и радиус окружностей, при которых прямая является их общей касательной.

Рассмотрим два уравнения $(x-2)^2+\left(ax-4\sqrt{2}\pm3\right)^2=b^2$

$x^2-4x+4+a^2x^2-2ax\left(4\sqrt{2}\pm3\right)+\left(4\sqrt{2}\pm3\right)^2-b^2=0$

$\left(a^2+1\right)x^2-2\left(2+a\left(4\sqrt{2}\pm3\right)\right)x+\left(4\sqrt{2}\pm3\right)^2-b^2=0$

$\frac{D}{4}=\left(2+a\left(4\sqrt{2}\pm3\right)\right)^2-\left(a^2+1\right)\left(\left(4\sqrt{2}\pm3\right)-b^2\right)=0$ или

$4+4a\left(4\sqrt{2}\pm3\right)-\left(\left(4\sqrt{2}\pm3\right)^2-b^2\right)+a^2b^2=0.$

Отсюда получаем: $12a-24\sqrt{2}=-12a+24\sqrt{2}$; $a=2\sqrt{2}$.

$4\left(11+6\sqrt{2}\right)-45-24\sqrt{2}+b^2=0$; $b^2=1$; $|b|=1$.

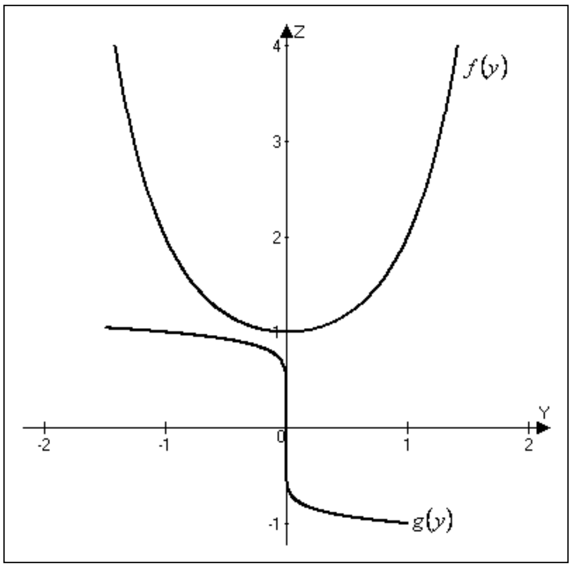
Ответ: $a=2\sqrt{2}$; $|b|=1$.

12. Найдите все положительные значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} a^{y^2}=\sqrt[9]{-0{,}125-3x-2x^2} \\ 16x^2+1=8y-24x \end{cases}$ имеет ровно два решения.

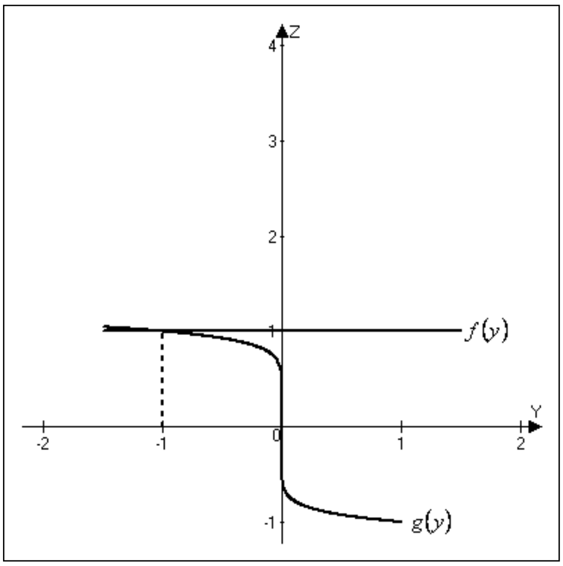
Решение.

Выразим из второго уравнения y и подставим в первое, получим следующую систему: $\begin{cases} a^{y^2}=\sqrt[9]{-y} \\ y=0{,}125+3x+2x^2 \end{cases}$.

Решим уравнение $a^{y^2}=\sqrt[9]{-y}$. Рассмотрим взаимное расположение графиков функций $z=f(y)=a^{y^2}$ и $z=g(y)=\sqrt[9]{-y}$ в следующих трех случаях:



$a>1$

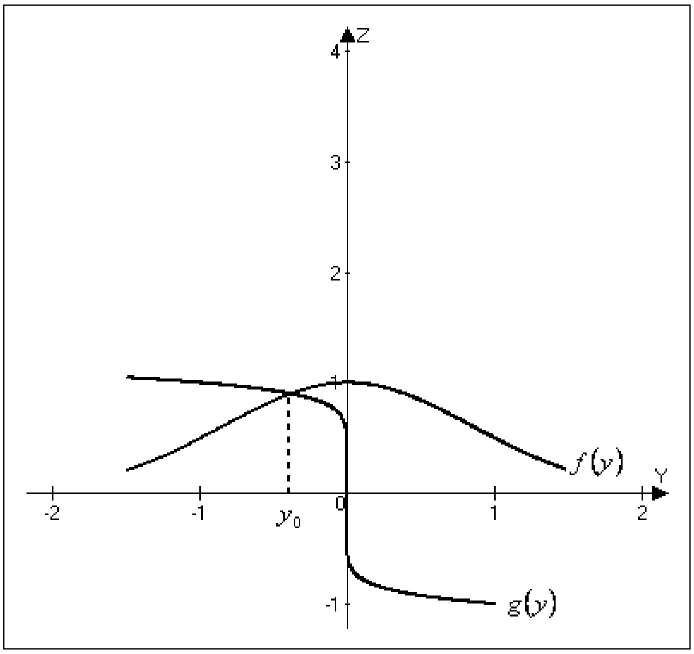


$a=1$

Итак, при $a>1$ графики функций $z=f(y)$ и $z=g(y)$ общих точек не имеют и, следовательно, уравнение $a^{y^2}=\sqrt[9]{-y}$ не имеет корней.

При $a=1$ графики пересекаются в точке с абсциссой $y_0=-1$ и уравнение $a^{y^2}=\sqrt[9]{-y}$ имеет один корень $y_0=-1$.

При $0<a<1$ графики пересекаются в точке с абсциссой y_0 $(-1<y_0<0)$ и уравнение $a^{y^2}=\sqrt[9]{-y}$ имеет один корень $-1<y_0<0$.



Подставим y_0 во второе уравнение системы:

$16x^2+24x+1-8y_0=0$.

$\frac{D}{4}=144-16+128y_0>0$; $y_0>-1$.

Ответ: $0<a<1$.

$0<a<1$

13. Найдите все значения параметра a, при которых в множестве решений неравенства $\left(2^{3\log_8(x-1)}+9^{\log_3(a+2)}+2a\log_2\frac{1}{32}-3\right)\cdot\left(x\log_4 9\cdot\log_3 2-5^{\log_{25}(a-3)^2}\right)\le 0$ (1)

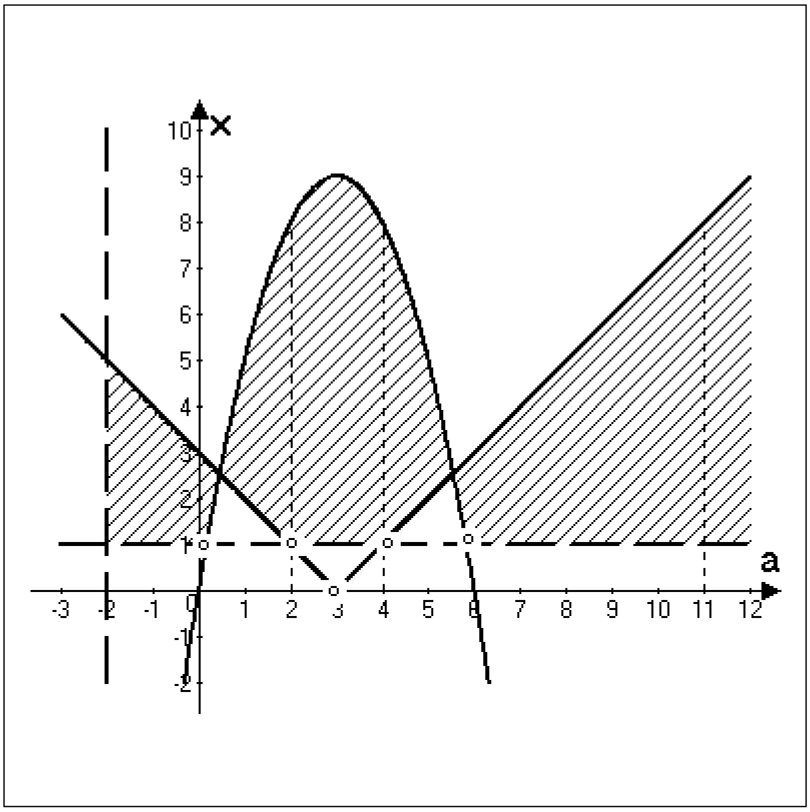
можно расположить 8 последовательных членов арифметической прогрессии, разность которой равна 1.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x-1>0, \\ a+2>0, \\ a\ne 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(1;\infty) \\ a\in(-2;3)\cup(3;\infty) \end{cases}$

Исходное неравенство (1) имеет следующий вид: $\left(x-1+(a+2)^2-10a-3\right)\cdot\left(x-|a-3|\right)\le 0$ или $\left(x+a^2-6a\right)\cdot\left(x-|a-3|\right)\le 0$.

Значения параметра a должны быть такими, чтобы в промежутке решения неравенства можно было расположить отрезок длиной 7 единиц.



Ответ: $(2;3)\cup(3;4)\cup(11,\infty)$.

14. Найдите все значения параметра a, при которых число целочисленных решений неравенства

$$27^{-|x-a|}\log_3\left(x^2-4x+7\right)+\left(1+\sqrt{x+1}\right)^{\log_3\left(1+\sqrt{5-x}\right)}\le$$
$$\le 3^{4x-x^2-4}\left(\log_3\left(|x-a|+1\right)+1\right)+\left(1+\sqrt{5-x}\right)^{\log_3\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$$

максимально.

Решение.

Исходное неравенство равносильно системе неравенств:

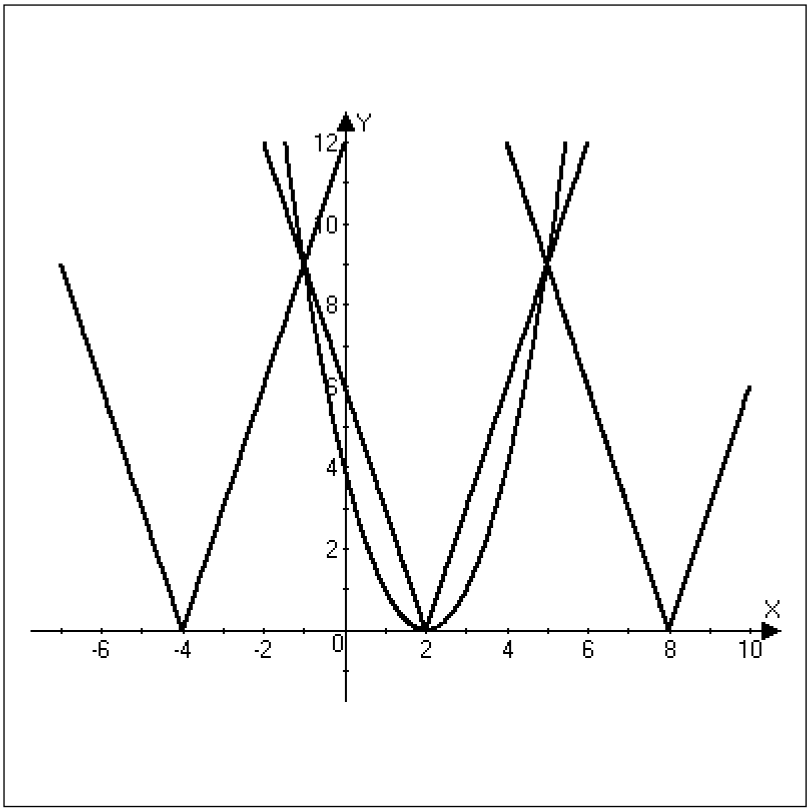
$$\begin{cases} 3^{(x-2)^2}\log_3\left((x-2)^2+3\right)\le 3^{3|x-a|}\log_3\left(3|x-a|+3\right) \\ x\ge -1 \\ x\le 5 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $f(t)=3^t\log_3(t+3)$, $t\ge 0$.

Функция $f(t)$ строго возрастает как произведение двух строго возрастающих функций: $f(t_1)\le f(t_2)\ \Leftrightarrow\ t_1\le t_2$.

Пусть $t_1=(x-2)^2$, $t_2=3|x-a|$.

$$\begin{cases} (x-2)^2\le 3|x-a| \\ x\ge -1 \\ x\le 5 \end{cases}$$



Число целых решений максимально, если решением является отрезок $[-1;5]$.
$a \in (-\infty;-4) \cup \{2\} \cup [8;\infty]$.
Ответ: $(-\infty;-4) \cup \{2\} \cup [8;\infty]$.

15. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} \left(3\sqrt{x|x|} + |y| - 3\right) \cdot \left(|x| + 3|y| - 9\right) = 0 \\ (x-a)^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ имеет ровно три решения.

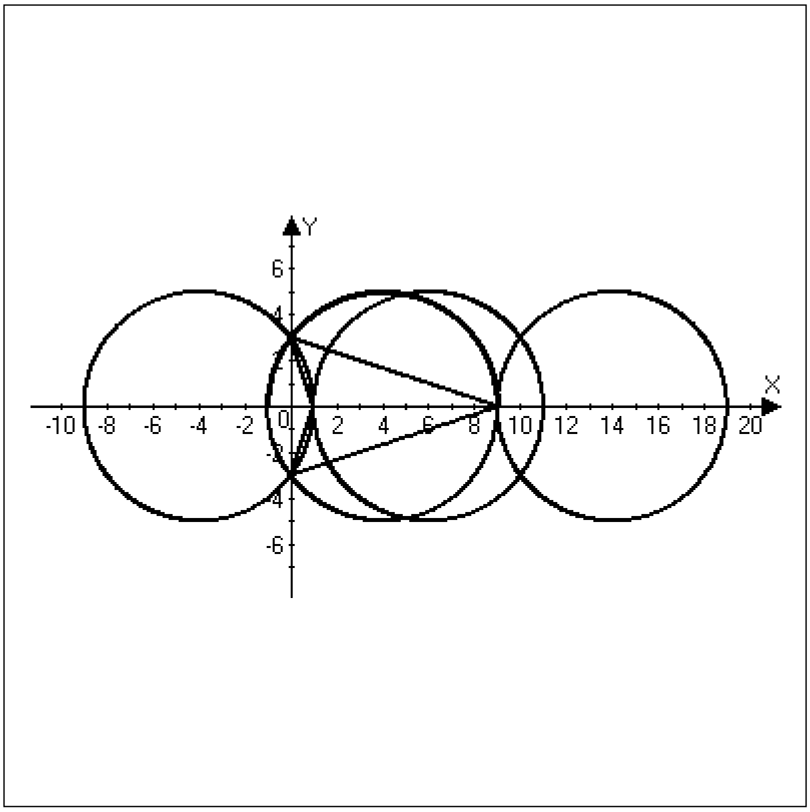
Решение.

Если $(x;y)$ — решение системы, то и $(x;-y)$ — решение системы. Значит, необходимым условием существования нечетного числа решений является равенство $y = -y$ или $y = 0$.

Подставляя эти значения в исходную систему и учитывая, что $x \ge 0$, получаем систему $\begin{cases} (3x-3) \cdot (x-9) = 0 \\ (x-a)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 9 \end{array}\right. \\ |x-a| = 5 \end{cases}$.

Система может иметь нечетное число решений при $a \in \{-4, 4, 6, 14\}$. Выясним, когда система имеет ровно три решения:

$$\begin{cases} (3x + |y| - 3) \cdot (x + 3|y| - 9) = 0 \\ (x-a)^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0 \le x = 1 - \dfrac{|y|}{3} \\ 0 \le x = 9 - 3|y| \end{array}\right. \\ (x-a)^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$



Очевидно, что из четырех окружностей с центрами, соответственно, в точках $x_1 = -4$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$ и $x_4 = 14$ только три имеют по три общих точки с множеством точек, заданных уравнением $(3x + |y| - 3) \cdot (x + 3|y| - 9) = 0$.

Ответ: -4; 4; 6.

ТИПОВЫЕ И ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАНИЯ С6

Задания С6 проверяют умение строить и исследовать простые математические модели. Выполнение этих заданий не требует знаний специальных разделов олимпиадной математики, однако по своему содержанию и уровню сложности эти задачи, безусловно, следует отнести к олимпиадным. Их невозможно систематизировать и выделить какие-либо общие приемы решения. Возможно, единственное, что их объединяет, — практически все эти задачи в натуральных или целых числах.

1. (ЕГЭ 2010). Найдите все пары натуральных чисел k и n, таких, что $k<n$ и $\left(n^2\right)^k=\left(k^2\right)^n$.

Решение.

Преобразуем исходное равенство:

$\left(n^2\right)^k=\left(k^2\right)^n$; $k\cdot\ln n^2=n\cdot\ln k^2$; $\frac{1}{n}\ln n=\frac{1}{k}\ln k$; $f(n)=f(k)$,

где $f(x)=\frac{1}{x}\ln x$, $x>0$. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\cdot\ln x+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}=-\frac{\ln x-\ln e}{x^2}$,

$f'(x)\le 0$ при $x\ge e$ и $f'(x)\ge 0$ при $0<x\le e$.

Следовательно, функция возрастает на промежутке $(0;e]$ и убывает на промежутке $[e;+\infty)$. Так как $k<n$, то равенство $f(n)=f(k)$ может выполняться только при условии $k<e<n$. Отсюда следует, что $k=1$ или $k=2$, причем для каждого из них существует не более одного значения n, удовлетворяющего уравнению в паре с этим значением k.

В случае $k=1$ из уравнения получаем: $\frac{1}{k}\ln k=\frac{1}{n}\ln n=0$, откуда следует $n=1$, что невозможно.

В случае $k=2$ уравнению удовлетворяет значение $n=4$: $\frac{1}{2}\ln 2=\frac{2}{4}\ln 2=\frac{1}{4}\ln 4$, и это значение единственное.

Ответ: $k=2$; $n=4$.

2. (ЕГЭ 2011). Число N равно произведению 10 различных натуральных чисел, больших 1. Какое наименьшее число различных натуральных делителей (включая единицу и само число) может иметь число N ?

Решение.

Докажем, что у любого числа N , удовлетворяющего условию, заведомо есть 56 различных делителей. Действительно, пусть $N = a_1 a_2 ... a_{10}$, $a_1 < a_2 < ... < a_{10}$.

Тогда числа $1 < a_1 < a_2 < a_1a_2 < a_1a_3 < a_2a_3 < a_1a_2a_3 < a_1a_2a_4 < a_1a_3a_4 < a_2a_3a_4 < a_1a_2a_3a_4 < a_1a_2a_3a_5 <$ $< a_1a_2a_4a_5 < a_1a_3a_4a_5 < a_2a_3a_4a_5 < ... < a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9 < ... < a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10} <$ $< a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}$ попарно различны и являются делителями числа N , а их количество равно $1+2+3+...+9+10+1=56$. Значит, меньше, чем 56 делителей у числа быть не может.

Приведем пример числа, удовлетворяющего условию, у которого ровно 56 различных делителей: $N = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 ... 2^{10} = 2^{55}$.

Ответ: 56.

3. (ЕГЭ 2012). Каждое из чисел 1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11 по одному записывают на 10 карточках. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах пишут по одному каждое из чисел 1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные десять сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Решение.

а) Среди десяти данных чисел нет противоположных. Значит, сумма чисел на каждой карточке не равна 0. Поэтому все произведение не может равняться 0.

б) Среди десяти данных чисел шесть нечетных. Значит, на какой-то карточке попадется два нечетных числа, и их сумма четная. Поэтому все произведение четно и не может равняться 1.

в) Среди десяти данных чисел шесть нечетных. Значит, хотя бы на двух карточках с обеих сторон написаны нечетные числа, и сумма чисел на каждой из этих карточек четная. Поэтому все произведение делится на 4.

Наименьшее целое положительное число, которое делится на 4, это 4. Оно получается при следующем наборе пар чисел на карточках: (1; -2); (-2; 1); (-3; 4); (-4; 3); (-5; 7); (7; -5); (-8; 9); (9; -8); (10; -11); (-11;10).

Ответ: а) нет; б) нет; в) 4.

4. (ЕГЭ 2012). Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{2}{11}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 9 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а) и б)?

Решение.

а) Если группа состоит из 2 мальчиков, посетивших только театр, 7 мальчиков, посетивших только кино, и 11 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 20 учащихся могло быть 9 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 10 или больше. Тогда девочек было 10 или меньше. Театр посетило не более 2 мальчиков, поскольку если бы их было 3 или больше, то доля мальчиков в театре была бы не меньше $\frac{3}{3+10}=\frac{3}{13}$ $>\frac{2}{11}$. Аналогично, кино посетило не более 7 мальчиков, так как $\frac{8}{8+10}=\frac{8}{18}>\frac{2}{5}$. Тогда хотя бы один мальчик не посетил ни театр, ни кино, что противоречит условию. В пункте а) показано, что в группе из 20 учащихся могло быть 9 мальчиков. Значит, наибольшее число мальчиков в группе — 9.

в) Предположим, что какой-то мальчик сходил и в театр, и в кино. Если бы вместо него в группе присутствовало два мальчика, один из которых посетил только театр, а другой — только кино, то доля мальчиков и в театре, и в кино осталась бы прежней, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек в группе можно считать, что каждый мальчик сходил или только в театр, или только в кино.

Пусть в группе m_1 мальчиков, посетивших театр, m_2 мальчиков, посетивших кино, и d девочек. Оценим долю девочек в этой группе. Будем считать, что все девочки ходили и в театр, и в кино, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля в театре и в кино не уменьшится. По условию, $\frac{m_1}{m_1+d}\le\frac{2}{11}$, $\frac{m_2}{m_2+d}\le\frac{2}{5}$, значит, $\frac{m_1}{d}\le\frac{2}{9}$, $\frac{m_2}{d}\le\frac{2}{3}$. Тогда $\frac{m_1+m_2}{d}\le\frac{8}{9}$, поэтому доля девочек в группе $\frac{d}{m_1+m_2+d}=\frac{1}{\frac{m_1+m_2}{d}+1}\ge\frac{1}{\frac{8}{9}+1}=\frac{9}{17}$.

Если группа состоит из 2 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 9 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено, а доля девочек в группе равна $\frac{9}{17}$.

Ответ: а) да; б) 9; в) $\frac{9}{17}$.

Критерии оценивания

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные результаты (см. критерий на 1 балл)	4

Верно получены три из перечисленных результатов (см. критерий на 1 балл)	3
Верно получены два из перечисленных результатов (см. критерий на 1 балл)	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. а; — обоснованное решение п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Совокупность *A* состоит из различных натуральных чисел. Количество чисел в *A* больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из *A* равно 210. Для любых двух чисел из *A* их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из *A* делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит *A*.

Решение.

Так как каждое из чисел, принадлежащих *A*, должно делить $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, то все числа из *A* состоят только из простых сомножителей 2, 3, 5, 7, входящих в эти числа в степени не выше первой. По условию, произведение всех чисел делится на $1920 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5$. Следовательно, среди чисел, составляющих *A*, должно быть не менее семи четных чисел. Всем указанным условиям удовлетворяют следующие восемь чисел:

2; $6 = 2 \cdot 3$; $10 = 2 \cdot 5$; $14 = 2 \cdot 7$; $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$; $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$; $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$; $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Если число 2 входит в *A*, то любой другой элемент *A* обязан делиться на 2, т. к. по условию любые два числа из *A* имеют общий делитель, отличный от 1. Значит, в этом случае $A = \{2, 6, 10, 14, 30, 42, 70, 210\}$ (по условию число элементов в A не менее восьми). Однако в этом случае произведение всех выписанных чисел равно $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^4$ является полным квадратом, что противоречит условию. Следовательно, число 2 не входит в A. Числа 6; 10; 14; 30; 42; 70; 210 могут входить в множество A, но оно не может состоять только из этих чисел. Его необходимо дополнить хотя бы одним нечетным числом. Пусть N — одно из нечетных чисел, принадлежащих A. Так как наибольший общий делитель чисел 6 и N отличен от 1, то N должно делиться на 3 (на 2 оно не делится). Аналогично, N должно делиться на 5 и на 7. Значит, N должно делиться на $3 \cdot 5 \cdot 7$. Так как простые числа 3, 5, 7 входят в N в степени не выше первой, то

$N = 3 \cdot 5 \cdot 7$ и других нечетных чисел в A быть не может.

Ответ: $A = \{6,10,14,30,42,70,105,210\}$.

5. Найдите все натуральные числа, которые делятся на 30 и имеют ровно 99 различных натуральных делителей (считая 1 и само это число).

Решение.

Сначала докажем следующее утверждение.

Если разложение натурального числа n на простые множители имеет вид $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, (где $p_1, \ldots, p_k$ — различные простые числа, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — натуральные числа, $k \geq 2$), то $d(n)$ — количество различных делителей числа n (считая 1 и само число n) находится по формуле: $d(n) = (1+\alpha_1) \cdot \ldots \cdot (1+\alpha_k)$ $(*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о:

Пусть m — некоторый делитель числа n. Так как n делится на m, то в разложении числа m на простые множители не может быть простых чисел, отличных от чисел $p_1, \ldots, p_k$, и при этом ни одно из чисел $p_1, \ldots, p_k$ не может входить в разложение на множители числа m в степени большей, чем оно входит в разложение числа n. Следовательно, все делители числа m — это числа вида $p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$, где $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ для всех $i \in [1, \ldots, k]$.

Чтобы подсчитать количество чисел указанного вида, заметим, что этих чисел ровно столько, сколько различных наборов целых чисел $\beta_1,...,\beta_k$, где $0 \le \beta_i \le \alpha_i$ для всех $i \in [1,...,k]$. Подсчитаем количество этих наборов: число β_1 можно выбрать $(1+\alpha_1)$ способами (т. к. $\beta_1 \in [0,...,\alpha_1]$), число β_2 — $(1+\alpha_2)$ способами (т.к. $\beta_2 \in [0,...,\alpha_2]$) и т.д. Поэтому все k чисел $\beta_1,...,\beta_k$ можно выбрать $(1+\alpha_1)\cdot ... \cdot(1+\alpha_k)$ способами. Если $k=1$, то набор состоит из $(1+\alpha_1)$ чисел, т. к. $\beta_1 \in [0,...,\alpha_1]$. Формула $(*)$ доказана.

Теперь перейдем непосредственно к решению задачи.

Пусть n — одно из искомых натуральных чисел. Так как n делится на 30, а $30 = 2\cdot 3\cdot 5$, то в разложении числа n на простые множители обязательно присутствуют числа 2, 3, 5. Поэтому разложение числа n на простые множители одного из двух видов: либо $n = 2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}\cdot 5^{\gamma}$, где $\alpha,\beta,\gamma \in N$ (если других простых делителей, кроме чисел 2, 3, 5 у числа n нет); либо $n = 2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}\cdot 5^{\gamma}\cdot p_1^{\delta_1}\cdot ... \cdot p_k^{\delta_k}$, где $k \ge 1$, $p_1,...,p_k$ — различные простые числа, отличные от чисел 2, 3, 5 и $\alpha,\beta,\gamma,p_1,...,p_k \in N$.

По условию, количество делителей числа n равно 99. По формуле $(*)$

$(1+\alpha)\cdot(1+\beta)\cdot(1+\gamma) = 99$ или $(1+\alpha)\cdot(1+\beta)\cdot(1+\gamma)\cdot(1+\delta_1)\cdot ... \cdot(1+\delta_k) = 99$.

Последний случай невозможен. $99 = 3\cdot 3\cdot 11$ — произведение трех простых чисел. Каждое из четырех чисел $(1+\alpha)\ge 2$, $(1+\beta)\ge 2$, $(1+\gamma)\ge 2$, $(1+\delta_1)\ge 2$ и каждое натуральное число $\alpha,\beta,\gamma,\delta_1$, большее 1, либо само является простым, либо разлагается в произведение простых чисел. Таким образом, количество простых чисел не совпадает и $(1+\alpha)\cdot(1+\beta)\cdot(1+\gamma)\cdot(1+\delta_1) \ne 99$.

3) Из равенства $(1+\alpha)\cdot(1+\beta)\cdot(1+\gamma) = 99 = 3\cdot 3\cdot 11$ следует, что два из чисел $1+\alpha$, $1+\beta$, $1+\gamma$ равны 3, а одно – 11. Таким образом, возможны следующие три варианта:

а) $\alpha = 10$; $\beta = 2$; $\gamma = 2$; б) $\alpha = 2$; $\beta = 10$; $\gamma = 2$; с) $\alpha = 2$; $\beta = 2$; $\gamma = 10$.

Ответ: $2^{10}\cdot 3^2\cdot 5^2$; $2^2\cdot 3^{10}\cdot 5^2$; $2^2\cdot 3^2\cdot 5^{10}$.

6. Найдите все простые числа b, для каждого из которых существует такое целое число a, что дробь $\frac{a^4+16a^2+7}{a^3+15a}$ можно сократить на b.

Решение.

Если целые числа a^4+16a^2+7 и $a(a^3+15a)$ делятся на b, то и их разность $(a^4+16a^2+7)-a(a^3+15a)=a^2+7$ делится на b.

Тогда число $(a^3+15a)-a(a^2+7)=8a$ делится на b.

Тогда число $8(a^2+7)-a\cdot 8a=56$ делится на b.

Таким образом, искомое число b — простой делитель числа 56, то есть 2 или 7.

Проверим, для каких из этих чисел существует число a.

Если a нечетное, то числитель и знаменатель данной дроби — четные числа, поэтому дробь можно сократить на 2.

Если a кратно 7, то числитель и знаменатель данной дроби также кратно 7, поэтому дробь можно сократить на 7.

Ответ: 2; 7.

7. Найдите все такие пары натуральных чисел a и b, что если число a возвести в квадрат и к полученному числу приписать справа десятичную запись числа b, то получится число, большее произведения чисел a и b ровно в три раза.

Решение.

Пусть количество цифр в десятичной записи числа b равно n, т. е. $10^{n-1}\le b<10^n$. Тогда при возведении числа a в квадрат и приписывании к полученному числу справа десятичной записи числа b, получим число, равное $10^n\cdot a^2+b$. Таким образом, получим уравнение $10^n\cdot a^2+b=3ab\,(*)$. Отсюда $10^n\cdot a^2=(3a-1)b<(3a-1)\cdot 10^n$; $a^2-3a+1<0$. Этому неравенству удовлетворяют лишь два натуральных числа: $a=1$ и $a=2$. Подставим эти значения в уравнение $(*)$, получим $a=1$; $b=5\cdot 10^{n-1}$ и $a=2$; $b=8\cdot 10^{n-1}$, где $n\in N$.

Ответ: $a=1$; $b=5\cdot 10^{n-1}$ и $a=2$; $b=8\cdot 10^{n-1}$, $n\in N$.

8. Найдите все такие пары натуральных чисел a и b, что $a<b$ и выполняется равенство $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{10}$.

Решение.

Предположим, что числа a и b удовлетворяют условию задачи.

Поскольку $b \geq a > 0$, то $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$, и, значит, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \leq \frac{2}{a}$.

Так как по условию $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{10}$, то $\frac{1}{10} \leq \frac{2}{a}$, $a \leq 20$.

При этом так как $\frac{1}{b}>0$, то $\frac{1}{a}=\frac{1}{10}-\frac{1}{b}<\frac{1}{10}$ и $a>10$.

Таким образом, для числа a получена следующая оценка: $10<a\leq 20$.

Из равенства $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{10}$ выразим b через a: $b=\frac{10a}{a-10}$. Искомыми значениями a являются те натуральные числа из промежутка $[11;20]$, при которых число $\frac{10a}{a-10}$ является натуральным. Подставляя в выражение $\frac{10a}{a-10}$ все натуральные числа от 11 до 20, получаем все искомые значения a и соответствующие им значения b.

Ответ: $(11;110)$; $(12;60)$; $(14;35)$; $(15;30)$; $(20;20)$.

9. Найдите все пары натуральных чисел m и n, что каждое из чисел m^3+2m+n^3 и n^3+2n+m^3 делится на число m^2+n^2.

Решение.

Если оба числа m^3+2m+n^3 и n^3+2n+m^3 делятся на число m^2+n^2, то и их разность $2(m-n)$ делится на m^2+n^2. Покажем, что $|2(m-n)|<m^2+n^2$. Обозначим через k наибольшее из чисел m и n, тогда $|2(m-n)|<2k \leq k^2+1 \leq m^2+n^2$.

Так как $2(m-n)$ делится на m^2+n^2 и $|2(m-n)|<m^2+n^2$, то $2(m-n)=0$. Следовательно, $m=n$ и задача сводится к нахождению таких натуральных чисел n, что $2(n^3+n)$ делится на $2n^2$.

$2(n^2+n)=q\cdot 2n^2$; $n^2+n=qn$; $qn-n^2=1$; $n(q-n)=1$.

Из этого равенства следует, что n является делителем 1, поэтому единственно возможное значение n — это $n=1$.

Ответ: $m=n=1$.

10. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 648, и а) пять; б) четыре; в) три из них образуют геометрическую прогрессию.

Решение.

а) Покажем, что пяти чисел, образующих геометрическую прогрессию, быть не может. Действительно, пусть пять таких чисел найдутся. Обозначим первый член прогрессии b_1, а знаменатель q. Тогда $648=b_1\cdot b_1q\cdot b_1q^2\cdot b_1q^3\cdot b_1q^4=b_1q^{10}=(b_1q^2)^5$, т. е. 648 является пятой степенью.

П р о т и в о р е ч и е:

б) Покажем, что четырех чисел, образующих геометрическую прогрессию, быть не может. Пусть среди натуральных чисел, дающих в произведении 648, есть четыре целых числа, образующих геометрическую прогрессию. Обозначим первый член прогрессии b_1, а знаменатель прогрессии $q=\frac{m}{n}>1$ (m и n — взаимно простые числа, причем $m>1$). Тогда произведение этих четырех чисел $\frac{b_1^4\cdot m^6}{n^6}$ будет являться делителем числа 648. Так как числа m и n взаимно простые, простые множители числа m будут входить в состав произведения чисел в той степени, в которой они входят в число $b_1^4\cdot m^6$, то есть, как минимум, в шестой степени. Однако $648=2^3\cdot 3^4$, то есть, простых множителей, входящих в шестой степени, в составе этого числа нет.

в) Пример пяти чисел, произведение которых равно 648 и среди которых есть три числа, образующих геометрическую прогрессию: 1, 3, 9, 6, 4.

Ответ: а) нет; б) нет; в) да.

Литература

1. Алгебра: профильный уровень: 10—11 классы: тематические и итоговые контрольные работы: дидактические материалы / [Н. Н. Гусева, Е. С. Ионова, Л. В. Федотова [и др.]. — М. : Вентана-Граф, 2011.

2. *Бородкина, В. В.* Теория вероятностей и статистика. 7—8 класс / В. В. Бородкина, И. Р. Высоцкий, П. И. Захаров, И. В. Ященко. — М. : МЦНМО, 2011.

3. *Высоцкий, И. Р.* ЕГЭ 2012. Математика. Задача B10. Теория вероятностей. Рабочая тетрадь / И. Р. Высоцкий, И. В. Ященко ; под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. — М. : МЦНМО, 2012.

4. ЕГЭ 2012. Математика. Типовые тестовые задания / И. Р. Высоцкий, П. И. Захаров, В. С. Панферов [и др.] ; под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. — М. : Экзамен, 2012.

5. *Козко, А. И.* ЕГЭ 2011. Математика. Задача С5. Задачи с параметром / А. И. Козко, В. С . Панферов, И. Н. Сергеев, В. Г. Чирский ; под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. — М. : МЦНМО, 2011.

6. *Корянов А. Г., Прокофьев А. А.* Отбор корней в тригонометрических уравнениях. Типовые задания С1. http: / / alexlarin.net / ege / 2011 / C12011.pdf

7. Математика. Все для ЕГЭ 2012. Книга I / Д. А. Мальцев, А. А. Мальцев, Л. И. Мальцева. — Ростов н / Д : Издатель Мальцев Д. А. ; М. : НИИ школьных технологий, 2011.

8. Открытый банк заданий ЕГЭ. [Электронный ресурс]. — www.mathege.ru.

9. *Панферов, В. С.* Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач / В. С. Панферов, И. Н. Сергеев - ФИПИ. — 2-е изд. , доп. и расшир. — М. : Интеллект-Центр, 2012.

10. *Пратусевич, М. Я.* ЕГЭ 2011. Математика. Задача С6. Арифметика и алгебра / М. Я. Пратусевич, С. Е. Рукшин, К. М. Столбов, И. В. Ященко; под ред. А. Л. Семенова,И. В. Ященко. — М. : МЦНМО, 2011.

11. *Смирнов, В. А.* Стереометрия : пособие для подготовки к ЕГЭ / под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. — М. : МЦНМО, 2009.
12. *Шестаков, С. А.* ЕГЭ 2011. Математика. Задача С1 / С. А. Шестаков, П. И. Захаров; под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. — М. : МЦНМО, 2011.

Оглавление

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

Избранные задания частей B и C

Авторы-составители:

М. А. Мичасова, Б. Н. Иванов

Редактор *Воронцова Н. А.*

Компьютерная верстка *Шуракова Л. В.*

Оригинал-макет подписан в печать 28.12.2012 г.
Формат 60×84 $^{1}/_{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура «Times».
Печать офсетная. Усл.-печ. л. 25,6. Тираж 100 экз. Заказ 2021.

ГБОУ ДПО «Нижегородский институт развития образования»
603122, Н. Новгород, ул. Ванеева, 203.
www.niro.nnov.ru

Отпечатано в издательском центре учебной
и учебно-методической литературы ГБОУ ДПО НИРО